

EJERCICIO PRÁCTICO. M1

- **Problema 1 (10 puntos)**

Sea P_n el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n juntamente con el polinomio cero, con coeficientes reales.

Se considera la aplicación definida por

$$f: P_n \rightarrow P_{n+1}$$
$$P(x) \rightarrow f(P(x)) = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} (e^{-x^2} \cdot P(x))$$

donde $\frac{d}{dx}$ representa la diferencial de x .

- (a) Demostrar que la aplicación f es lineal. (4 puntos)
- (b) Hallar el núcleo de f . (2 puntos)
- (c) Hallar la dimensión de la imagen de f . (2 puntos)
- (d) Determinar la matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases canónicas. (2 puntos)

- **Problema 2 (10 puntos)**

En una circunferencia de radio R se traza una cuerda de longitud a . Tomando dicha cuerda como diámetro, se traza una semicircunferencia que, con el arco correspondiente a la cuerda, determina una **lúnula** (figura plana cóncava limitada por dos arcos de diferente radio).

- (a) Determinar el área de dicha lúnula en función del radio R y la longitud de la cuerda a . (6 puntos)
- (b) Demostrar que, para todo triángulo inscrito en una semicircunferencia, se cumple que su área es igual a la suma de las áreas de las dos lúnulas construidas sobre los lados menores del triángulo. (4 puntos)

- **Problema 3 (15 puntos)**

(a) Demostrar que si a es un número natural no nulo y $n > 1$, el número dado por

$$A_{an} = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n)^2 - a^n, \text{ no es nunca un número primo. (5 puntos)}$$

(b) Demostrar que si $B_n = 2^n - 1$, es un número primo, también lo es el número n , siendo n un número natural. (5 puntos)

(c) Demostrar que para cualquier número natural n , el número $C_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$ es múltiplo de 169. (5 puntos)

- **Problema 4 (15 puntos)**

En una agencia de viajes, se sabe que el 60% de sus clientes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres viajes o más al año. Se sabe también que un 40% de clientes tiene hijos y realiza un viaje al año, que un 15% tiene hijos y realiza dos viajes al año, y que un 1% tiene hijos y realiza tres viajes o más al año. Se selecciona al azar a un cliente de esta agencia de viajes.

(a) Sea A el suceso “el cliente seleccionado no tiene hijos” y B el suceso “el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año”.

(a1) Calcular la probabilidad de $A \cap B$. (4 puntos)

(a2) Calcular la probabilidad de $A \cup B$. (2 puntos)

(a3) ¿Son A y B independientes? Indicar qué significa la respuesta en este caso. (2 puntos)

(b) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos? (2 puntos)

(c) Aplicación didáctica:

(c1) Relacionar el concepto de probabilidad con los saberes básicos establecidos en el currículum de la ESO vigente en la Comunitat Valenciana. (1 punto)

(c2) Diseñar una actividad manipulativa para la introducción del concepto de probabilidad en un grupo de alumnado de ESO. (2 puntos)

(c3) Indicar dos errores frecuentes que suele cometer el alumnado en la aplicación del concepto de probabilidad y explicar qué estrategia utilizar para evitarlos. (2 puntos)

EXERCICI PRÀCTIC. M1

- **Problema 1 (10 punts)**

Sea P_n l'espai vectorial dels polinomis de grau menor o igual que n juntament amb el polinomi zero, amb coeficients reals.

Es considera l'aplicaci3n definida per

$$f: P_n \rightarrow P_{n+1}$$
$$P(x) \rightarrow f(P(x)) = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} (e^{-x^2} \cdot P(x))$$

on $\frac{d}{dx}$ representa la diferencial d' x .

- (a) Demostrar que l'aplicaci3n f és lineal. (4 punts)
- (b) Trobar el nucli de f . (2 punts)
- (c) Trobar la dimensi3n de la imatge de f . (2 punts)
- (d) Determinar la matriu de l'aplicaci3n lineal f respecte de les bases can3niques. (2 punts)

- **Problema 2 (10 punts)**

En una circumferència de radi R tracem una corda de longitud a . Prenent esta corda com a diàmetre, dibuixar una semicircumferència que, amb l'arc corresponent a la corda, determina una **lúnula** (figura plana c3ncava limitada per dos arcs de diferent radi).

- (a) Determinar l'àrea d'esta lúnula en funci3n del radi R i la longitud de la corda a . (6 punts)
- (b) Demostrar que, per a tot triangle inscrit en una semicircumferència, es compleix que la seua àrea és igual a la suma de les àrees de les dos lúnules construïdes sobre els costats menors del triangle. (4 punts)

• **Problema 3 (15 puntos)**

(a) Demostrar que si a és un nombre natural no nul i $n > 1$, el número donat per

$$A_n = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n)^2 - a^n, \text{ no és mai un nombre primer. (5 punts)}$$

(b) Demostrar que si $B_n = 2^n - 1$, és un nombre primer, també ho és el número n , sent n un nombre natural. (5 punts)

(c) Demostrar que per a qualsevol nombre natural n , el número

$$C_n = 3^{3n+3} - 26n - 27 \text{ és múltiple de } 169. (5 \text{ punts})$$

• **Problema 4 (15 puntos)**

En una agència de viatges, se sap que el 60% dels seus clients realitza un viatge a l'any, el 30% realitza dos viatges a l'any, i el 10% restant realitza tres viatges o més a l'any. Se sap també que un 40% de clients té fills i realitza un viatge a l'any, que un 15% té fills i realitza dos viatges a l'any, i que un 1% té fills i realitza tres viatges o més a l'any. Se selecciona a l'atzar a un client d'esta agència de viatges.

(a) Siga A el succés "el client seleccionat no té fills" i B el succés "el client seleccionat realitza menys de tres viatges a l'any".

(a1) Calcular la probabilitat de $A \cap B$. (4 punts)

(a2) Calcular la probabilitat de $A \cup B$. (2 punts)

(a3) Són A i B independents? Indicar què significa la resposta en este cas. (2 punts)

(b) Si sabem que el client seleccionat realitza dos o més viatges a l'any, quina és la probabilitat que no tinga fills? (2 punts)

(c) Aplicació didàctica:

(c1) Relacionar el concepte de probabilitat amb els sabers bàsics establits en el currículum de l'ESO vigent en la Comunitat Valenciana. (1 punt)

(c2) Dissenyar una activitat manipulativa per a la introducci3n del concepte de probabilitat en un grup d'alumnat d'ESO. (2 punts)

(c3) Indicar dos errors freqüents que sol cometre l'alumnat en l'aplicaci3n del concepte de probabilitat i explicar quina estratègia utilitzar per a evitar-los. (2 punts)