PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2023	CONVOCATORIA: JULIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

<u>En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament que feu</u>

Problema 1. Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, en el qual a *és* un paràmetre real:

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)
b) Obtingueu les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat. (4 punts)

Solució:

a) SCD si $a \neq -3{,}1$, SCI si $a = 1$ i SI si $a = -3$.
b) $x = \lambda,\ y = -1 - \lambda,\ z = 1$.

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtingueu:

a) La matriu $M = (A - \alpha I)^2$, en la qual α és un paràmetre real. (6 punts)
b) El valor de α si existeix, per al qual la matriu M és la matriu nul·la. (4 punts)

Solució:

a) $M = (A - \ \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ 2 - 2\alpha & 2 - 2\alpha & 5 - 6\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix}$.
b) $\alpha = 1$.

Problema 3. Donats els punts $A = (2,\ -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ i $C = (-1, 0, 0)$:

a) Trobeu l'equació implícita de la recta r que conté els punts A i B. (3 punts)
b) Trobeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta anterior, r, i conté el punt C. (4 punts)
c) Calculeu la distància del punt A al pla π. (3 punts)

Solució:

a) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.
b) Un vector director de la recta és $(-1, 3, 3)$, per tant π: $-x + 3y + 3z - 1 = 0$.
c) $d(A, \pi) = \frac{6}{\sqrt{19}} \approx 1{,}3765$.

Problema 4. Donada la recta $r: (x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(-1, -1,2)$ i el pla $\pi: 5x + my + z = 2$:

a) Obtingueu la posició relativa de r i π en funció de m. (6 punts)
b) Per $m = 1$, calculeu el pla π' que conté a r i es perpendicular a π. (4 punts)

Solució:

a) Si $m \neq -3$, r i π es tallen en un punt, i si $m = -3$ la recta r està continguda en el pla π.
b) $\pi': 3x - 11y - 4z + 8 = 0$.

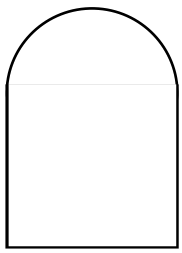
Problema 5. Considerem la funció $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comproveu que $x = -\frac{1}{2}$ és una discontinuïtat evitable. (2 punts)
b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement. (4 punts)
c) Obtingueu $\int f(x)\,dx$. (4 punts)

Solució:

a) $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \frac{2(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-x}{x+2}$.
b) $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$. La funció és decreixent en $(-\infty,\ -2) \cup \left(-2,\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)$.
c) $\int f(x)dx = 3\ln(|x+2|) - x + C$.

Problema 6. Una finestra rectangular està coronada per un semicercle tal com s'indica en la figura següent.



Sabent que el perímetre de la finestra és de 20 metres calculeu:

a) L'àrea de la finestra en funció de la seua amplària x. (3 punts)
b) Les dimensions que ha de tenir la finestra perquè permeta la màxima entrada de llum. (5 punts)
c) El valor d'aquesta àrea màxima. (2 punts)

Solució:

a) $\text{Àrea}(x) = 10x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$.
b) Dimensions $x = \frac{40}{\pi+4} = 5{,}601$ m, $y = \frac{20}{\pi+4} = 2{,}8005$ m (en què y és l'altura de la part rectangular).
c) Àrea $= \frac{200}{\pi+4} = 28{,}005$ m^2.

Problema 7. En una urna hi ha tres boles verdes, quatre roges i cinc grogues, totes d'igual grandària.

a) S'extrau una bola de l'urna, es mira el color i s'hi retorna. Es repeteix l'operació una altra vegada. Quina és la probabilitat que el color de les dues boles extretes siga el mateix? I la probabilitat que siguen diferents?
(5 punts)
b) S'extrauen al mateix temps tres boles. Quina és la probabilitat que les tres siguen de colors diferents? (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.
Solució:

a) $P(mateix\ color) = \frac{50}{144} \approx 0{,}3472.$

$P(diferent\ color) = 1 - P(mateix\ color) = \frac{94}{144} \approx 0{,}6527.$

b) $P(diferent\ color) = 6 * \frac{3*4*5}{12*11*10} = \frac{3}{11} \approx 0{,}2728.$

Problema 8. Una empresa té dues plantes de producció de telèfons portàtils. La primera planta en produeix de defectuosos amb una probabilitat de 0,02 i la segona amb una de 0,06. En comprar un portàtil de l'empresa, la probabilitat que siga de la primera planta és de 0,7. En comprem un. Determineu**:**

a) La probabilitat que procedisca de la segona planta de producció i siga defectuós. (4 punts)

b) Sabent que el portàtil comprat és defectuós, la probabilitat que l'haja fabricat la primera planta de producció. (6 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Solució:

a) $P(segona\ planta\ i\ defectuós) = \frac{9}{500} \approx 0{,}018.$

b) $P(primera\ planta \mid defectuós) = \frac{7}{16} \approx 0{,}4375.$

<u>En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado</u>.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Solución:
a) SCD si $a \neq -3,1$, SCI si $a = 1$ y SI si $a = -3$.
b) $x = \lambda, y = -1 - \lambda, z = 1$.

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Solución:
a) $M = (A - \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ 2 - 2\alpha & 2 - 2\alpha & 5 - 6\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix}$.
b) $\alpha = 1$.

Problema 3. Dados los puntos $A = (2, -1, 0), B = (1,2,3)$ y $C = (-1,0,0)$:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B. (3 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto A al plano π. (3 puntos)

Solución:
a) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.
b) Un vector director de la recta es $(-1,3,3)$, por tanto, $\pi: -x + 3y + 3z - 1 = 0$.
c) $d(A, \pi) = \frac{6}{\sqrt{19}} \approx 1.3765$.

Problema 4. Dada la recta $r: (x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$:
a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m. (6 puntos)
b) Para $m = 1$, calcular el plano π′ que contiene a r y es perpendicular a π. (4 puntos)

Solución:

a) Si $m \neq -3$, r y π se cortan en un punto, y si $m = -3$ la recta r está contenida en el plano π.
b) $\pi': 3x - 11y - 4z + 8 = 0$.

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$.

a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
c) Obtener $\int f(x)\, dx$. (4 puntos)

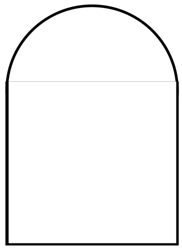
Solución:

a) $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \frac{2(1-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-x}{x+2}$.

b) $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$. La función es decreciente en $(-\infty,-2) \cup \left(-2,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.

c) $\int f(x)dx = 3\ln(|x+2|) - x + C$.

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros calcular:

a) El área de la ventana en función de su anchura x. (3 puntos)

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)

c) El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Solución:

a) Área$(x) = 10x - \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)x^2$.

b) Dimensiones $x = \frac{40}{\pi+4} = 5.601$ m, $y = \frac{20}{\pi+4} = 2.8005$ m (siendo y la altura de la parte rectangular).

c) Área $=\frac{200}{\pi+4} = 28.005$ m^2.

Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

a) $P(mismo\ color) = \frac{50}{144} \approx 0.3472$.

$P(distinto\ color) = 1 - P(mismo\ color) = \frac{94}{144} \approx 0.6527$.

b) $P(distinto\ color) = 6 * \frac{3*4*5}{12*11*10} = \frac{3}{11} \approx 0.2728$.

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar**:**

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)
b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

a) $P(segunda\ planta\ y\ defectuoso) = \frac{9}{500} \approx 0.018.$
b) $P(primera\ planta \mid defectuoso) = \frac{7}{16} \approx 0.4375.$