PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2022	CONVOCATORIA: JULIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

<u>En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament utilitzat.</u>

Problema 1. Donat el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre real a. (5 punts)
b) Trobeu totes les solucions del sistema quan aquest siga compatible. (5 punts)

Solució:
a) El determinant del sistema és $\Delta = -(a+2)(a-1)$. Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, es tracta d'un SCD. Si $a = -2$, es tracta d'un SI. Si $a = 1$, es tracta d'un SCI.
b) Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, la solució és $x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{2}{a+2}, z = \frac{a+1}{a+2}$. Si $a = 1$, la solució és $x = 1 - \lambda,\ y = \lambda,$ $z = \lambda$.

Problema 2. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors dels paràmetres a i b perquè es complisca $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 punts)
b) Per als valors a i b obtinguts en l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4. (3 punts)
c) Calculeu $\det(A^{-50})$ quan $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 punts)

Solució:
a) $a = 1, b = 0$.
b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) $\det(A^{-50}) = \frac{1}{\mathrm{de\,t}(A)^{50}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{50}}$.

Problema 3. Donats els punts $A = (2,0,0)$ i $B = (0,1,0)$, i la recta s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

a) Trobeu l'equació de la recta r que passa pels punts A i B. (2 punts)
b) Determineu l'equació implícita del pla que conté la recta s i és paral·lel a la recta r. (4 punts)
c) Calculeu la distància del punt A a la recta s. (4 punts)

Solució:
a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.
b) $x + 2y - 8z - 3 = 0$.
c) Distància $= \sqrt{\frac{27}{14}} = 1.389$.

Problema 4. Donats els punts $A = (2,1,-2)$ i $B = (3,2,3)$, i el plànol π definit per l'equació $2x + 2y + z = 3$. obteniu:

a) El punt de tall C entre el pla π i la recta perpendicular a π que passa per B. (5 punts)
b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són A, B i C. (5 punts)

Solució:

a) La recta perpendicular a π que passa per B és $(x, y, z) = (3,2,3) + \lambda(2,2,1)$. El punt és $\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$.
b) Àrea $=\sqrt{50}$.

Problema 5.

a) Calculeu, indicant tots els passos, la integral indefinida següent: (5 punts)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

b) Determineu, en funció de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\, dx$. (2 punts)
c) Determineu el valor de t major que 8 perquè $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\, dx$ siga igual a $\ln\frac{25}{4}$. (3 punts)

Solució:

a) $2\ln(|x - 7|) - 2\ln(|x + 2|) + C$.
b) $2\ln(|t - 7|) - 2\ln(|t + 2|) + 2\ln(10)$.
c) $t = 10$.

Problema 6. Considereu la funció $f(x) = e^{-x^2}$ per als valor positius de x. Per cada punt $M = (x, f(x))$ de la gràfica de f es tracen dues rectes paral·leles als eixos de coordenades, OX i OY. Aquestes dues rectes, juntament amb els eixos de coordenades, defineixen un rectangle.

a) Determineu l'àrea del rectangle en funció de x. (3 punts)
b) Trobeu el punt M que proporciona major àrea i calculeu aquesta àrea. (7 punts)

Solució:

a) Àrea$=xe^{-x^2}$.
b) L'àrea màxima és $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ i s'obté per al valor $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

<u>En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado</u>.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Solución:

a) El determinante del sistema es $\Delta = -(a+2)(a-1)$. Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ se trata de un SCD. Si $a = -2$ se trata de un SI. Si $a = 1$ se trata de un SCI.

b) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ la solución es $x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{2}{a+2}, z = \frac{a+1}{a+2}$. Si $a = 1$ la solución es $x = 1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda$.

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)
b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. (3 puntos)
c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

Solución:

a) $a = 1, b = 0$.

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\det(A^{-50}) = \frac{1}{\det(A)^{50}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{50}}$.

Problema 3. Dados los puntos $A = (2,0,0)$ y $B = (0,1,0)$, y la recta s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B. (2 puntos)
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto A a la recta s. (4 puntos)

Solución:

a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.

b) $x + 2y - 8z - 3 = 0$.

c) Distancia $\sqrt{\frac{27}{14}} = 1.389$.

Problema 4. Dados los puntos $A = (2,1,-2)$ y $B = (3,2,3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. (5 puntos)
b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. (5 puntos)

Solución:

a) La recta perpendicular a π que pasa por B es $(x,y,z) = (3,2,3) + \lambda(2,2,1)$. El punto es $\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$.

b) Área $\sqrt{50}$.

Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$. (3 puntos)

Solución:

a) $2\ln(|x-7|) - 2\ln(|x+2|) + C$.

b) $2\ln(|t-7|) - 2\ln(|t+2|) + 2\ln(10)$.

c) $t = 10$.

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. (3 puntos)

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Solución:

a) área=xe^{-x^2}.

b) El área máxima es $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ y se obtiene para el valor $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.