PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2020	CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
L'alumne triarà només TRES problemes entre els sis proposats.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
Es corregiran les tres primeres preguntes que es responguin, llevat que alguna estigui clarament ratllada.
BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.
Se corregirán las tres primeras preguntas que se contesten, a menos que alguna esté claramente tachada.

Problema 1. Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x+ay+2z &= 3 \\ x-3y+az &= -2, \\ x+y+2z &= a \end{cases}$ on a és un paràmetre real.
Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible. (4 *punts*)
b) La solució del sistema quan $a=0$. (3 *punts*)
c) Les solucions del sistema en el cas en què siga compatible indeterminat. (3 *punts*)

Solució. a) El sistema és compatible determinat si $a \neq 1{,}2$ i compatible indeterminat si $a=2$. b) $x=-11, y=-3, z=7$. c) Si $a=2$ la solució es $x=1-2\lambda, y=1, z=\lambda,\ \lambda \in \boldsymbol{R}$.

Problema 2. Ens donen els plans $\pi: x+y=1$ i $\pi': x-y+z=1$ i el punt $P(1,-1,0)$.
Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Unes equacions paramètriques de la recta r que passa pel punt P i és paral·lela als plans π i π'. (3 *punts*)
b) La distància de la recta r a cada un dels plans π i π'. (3 *punts*)
c) Les equacions de la recta que passa per P i talla perpendicularment la recta obtinguda com l' intersecció dels plans π i π'. (4 *punts*)

Solució. a) $x=1-\lambda, y=-1+\lambda, z=2\lambda$. b) $d(r,\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $d(r,\pi')=\frac{1}{\sqrt{3}}$. c) $x=1+\lambda, y=-1+5\lambda$, $z=-2\lambda,\ \lambda \in \boldsymbol{R}$.

Problema 3. Donada la funció $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, **obteniu raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El domini de definició i les asímptotes de la funció f. (3 *punts*)
b) Els intervals de creixement i de decreixement, així com la representació gràfica de la funció. (3 +1 *punts*)
c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *punts*)

Solució. a) Domini $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Asímptotes verticals $x=-1,\ x=1$.
Asímptotes horitzontals $y=-1,\ y=1$. b) f és sempre decreixent. c) $2\sqrt{2}-\sqrt{3} \cong 1.0964$.

Problema 4. Siga $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La justificació que A té inversa i el càlcul de dita matriu inversa. (3 *punts*)

b) Dos constants a, b de manera que $A^{-1}= A^2+aA+bI$. Es pot usar (sense comprovar-ho) que A verifica l'equació $A^3-3A^2+3A-I=0$ sent I la matriu identitat. (3 *punts*)

c) El valor de λ perquè el sistema d'equacions $(A-\lambda I)\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ tinga infinites solucions.

Per aquest valor de λ trobar totes les solucions del sistema. (2+2 *punts*)

Solució. a) $\det(A)=1$ per tant A es no singular. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$. b) $A(A^2-3A+3I)=I$ d'on s'obté que $A^{-1}=A^2-3A+3I$ i $a=-3, b=3$. c) $\lambda=1$, solució $x=\alpha, y=0, z=\beta$.

Problema 5. Es donen les rectes r: $\begin{cases} x=1\\ y=2+\lambda,\ \lambda\in \boldsymbol{R},\\ z=2\lambda\end{cases}$ s: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ i el pla $\pi: 3x+ay-z+1=0$.

Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Si hi ha algun valor del paràmetre a per al qual la recta r està continguda en el pla π. (4 *punts*)

b) La distància entre les rectes r i s. (3 *punts*)

c) El cosinus de l'angle que formen la recta r i la recta t: $\begin{cases}2x-y=0\\ y-z=2\end{cases}$. (3 *punts*)

Solució. a) No hi ha cap valor de a. b) $d(r,s)=\frac{10}{\sqrt{29}}$. c) Els vectors directors de r i t son $(0,1,2)$ i $(1,2,2)$, d'on el cosinus del angle demanat és $\frac{(0,1,2)\cdot(1,2,2)}{\|(0,1,2)\|\|(1,2,2)\|}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Problema 6. Els vèrtexs d'un triangle són $A(0,12)$, $B(-5,0)$ i $C(5,0)$. Es desitja construir un rectangle inscrit en el triangle anterior, de costats paral·lels als eixos coordenats i dos dels vèrtexs del qual tenen coordenades $(-x,0)$, $(x,0)$, sent $0\le x\le 5$. Els altres dos vèrtexs estan situats en els segments AB i AC. **Obteniu raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'expressió $f(x)$ de l'àrea del rectangle anterior. (4 *punts*)

b) El valor de x per al qual aquesta àrea és màxima i les dimensions del rectangle obtingut. (3 *punts*)

c) La proporció entre l'àrea del rectangle anterior i l'àrea del triangle. (3 *punts*)

Solució. a) $f(x)=\frac{24x(5-x)}{5}$. b) $x=\frac{5}{2}$, la base mesura 5 i l'altura 6. c) L'àrea del rectangle és 30 i la del triangle 60. La proporció és 0.5.

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay + 2z &= 3 \\ x - 3y + az &= -2 \\ x + y + 2\,z &= a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $a = 0$. (3 *puntos*)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

Solución. a) El sistema es compatible determinado si $a \neq 1,2$ y compatible indeterminado si $a = 2$. b) $x = -11, y = -3, z = 7$. c) Si $a = 2$ la solución es $x = 1 - 2\lambda, y = 1, z = \lambda$.

Problema 2. Se dan los planos $\pi: x + y = 1$ y $\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1,0)$.
Obtener razonadamente, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'. (3 *puntos*)
b) La distancia de la recta r a los planos π y π'. (3 *puntos*)
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.
(4 *puntos*)

Solución. a) $x = 1 - \lambda, y = -1 + \lambda, z = 2\lambda$. b) $d(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}, d(r, \pi') = \frac{1}{\sqrt{3}}$. c) $x = 1 + \lambda, y = -1 + 5\lambda$, $z = -2\lambda$.

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, **obtener razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3 +1 *puntos*)
c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *puntos*)

Solución. a) Dominio $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Asíntotas verticales $x = -1$, $x = 1$. Asíntotas horizontales $y = -1, y = 1$. b) f es siempre decreciente. c) $2\sqrt{2} - \sqrt{3} \cong 1.0964$.

Problema 4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Obtener razonadamente, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)
b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)
c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

Solución. a) $\det(A) = 1$ luego A es no singular. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. b) $A(A^2 - 3A + 3I) = I$ de donde se obtiene que $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$ y $a = -3, b = 3$. c) $\lambda = 1$, solución $x = \alpha, y = 0, z = \beta$.

Problema 5. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \boldsymbol{R}, \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ y el plano $\pi: 3x + ay - z + 1 = 0$. **Obtener razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π. (4 *puntos*)

b) La distancia entre las rectas r y s. (3 *puntos*)

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 *puntos*)

Solución. a) No hay ningun valor de a. b) $d(r, s) = \frac{10}{\sqrt{29}}$. c) Los vectores directores de r y t son (0,1,2) y (1,2,2), luego el coseno del ángulo pedido es $\frac{(0,1,2)\cdot(1,2,2)}{\|(0,1,2)\|\|(1,2,2)\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Problema 6. Los vértices de un triángulo son $A(0,12)$, $B(-5,0)$ y $C(5,0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x, 0)$, $(x, 0)$, siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 *puntos*)

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 *puntos*)

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 *puntos*)

Solución. a) $f(x) = \frac{24x(5-x)}{5}$. b) $x = \frac{5}{2}$, la base mide 5 y la altura 6. c) El área del rectángulo es 30 y la del triángulo 60. La proporción es 0.5.