GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT — PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2020	CONVOCATORIA: JULIO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
L'alumne triarà només TRES problemes entre els sis proposats.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
Es corregiran les tres primeres preguntes que es responguin, llevat que alguna estigui clarament ratllada.
BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.
Se corregirán las tres primeras preguntas que se respondan, a menos que alguna esté claramente tachada.

Problema 1. Donat el sistema d'equacions $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$, on a és un paràmetre real, **obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L' estudi del sistema en funció del paràmetre a. (5 *punts*)
b) Les solucions del sistema quan $a = -2$. (3 *punts*)
c) La solució del sistema quan $a = 0$. (2 *punts*)

Solució. a) El determinant de la matriu de coeficients val $-(a-1)^2(a+2)$. El sistema és compatible quan $a \neq 1$. Es valorarà amb dos punts la conclusió que el sistema és compatible determinat quan $a \neq 1, -2$. S'assignen dos punts a la comprovació que el sistema és compatible indeterminat quan $a = -2$ i un punt a la comprovació que el sistema és incompatible quan $a = 1$. b) $(x, y, z) = (1 + t, t, t)$, sent t un paràmetre real. c) $(x, y, z) = (2, -1, -1)$.

Problema 2. Es donen la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ i els punts $P = (1, 0, 0)$, $Q = (2,1,\alpha)$.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El valor d' α perquè la recta que passa per P i Q siga paral·lela a r. (3 *punts*)
b) L'equació del pla que conté P i Q i és paral·lel a r, quan $\alpha = 1$. (3 *punts*)
c) La distància del punt Q al pla que passa per P i és perpendicular a r, quan $\alpha = 1$. (4 *punts*)

Solució. a) $\alpha = -1$. b) $x - y = 1$. c) El pla que passa per P i és perpendicular a r és $\pi: x + y - z = 1$ i $d(Q, \pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3. Es dóna la funció real f definida per $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El domini i les asímptotes de la funció f. (3 *punts*)
b) La integral $\int f(x)dx$, així com la primitiva de $f(x)$ la gràfica de la qual passa pel punt (2, 0). (3+1 *punts*)
c) L'àrea de la regió limitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$. (3 *punts*)

Solució. a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0,1\}$. Les asímptotes verticals son $x = 0, x = 1$. La recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal. b) De $f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$ obtenim $\int f(x)dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$. La primitiva la gràfica de la qual passa pel punt $(2,0)$ s'obté quan $C = \ln 2 - \frac{1}{2}$. Es valorarà amb tres punts el càlcul de la integral indefinida i amb un punt la primitiva que passa pel punt $(2,0)$. c) Com que $f(x) > 0\ si\ 2 < x < 4$, l'àrea ve donada per $\int_2^4 f(x)dx = -\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{9}{2}\right) = 1{,}25$ ...

Problema 4. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que depenen del paràmetre real b.

Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de b perquè cada una de les matrius $AB\ i\ BA$ tinga inversa. (3 *punts*)

b) Els valors de b perquè la matriu A^TA tinga inversa, sent A^T la matriu transposada d'A. (3 *punts*)

c) La inversa de la matriu A^TA, quan aquesta inversa existeix. (4 *punts*)

Solució. a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$ no és invertible mai. Es valorarà amb 0,5 punts el càlcul del producte i amb 1 punt la comprovació que la matriu no té inversa. $BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$ és invertible quan $b \neq \pm\sqrt{6}$ (1,5 punts). b) $A^TA = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ és invertible per a qualsevol valor del paràmetre. c) $(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} (b^2+2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$.

Problema 5. Es donen el pla $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ i els punts $A(1,2,-1)$, $B(2,1,0)$.

Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'equació implícita del pla que passa pels punts A, B i és perpendicular a π. (4 *punts*)

b) Les equacions paramètriques de la recta r que és perpendicular a π i passa per A.
Troba dos plans la intersecció dels quals siga la recta r. (1+2 *punts*)

c) La distància entre el punt B i la recta r. (3 *punts*)

Solució. a) L'equació és $y + z = 1$. Es valorarà amb dos punts el càlcul del vector característic del pla. b) La recta és $r: (x,y,z) = (1,2,-1) + t(2,1,-1)$, sent t un paràmetre real. c) $d(B,r) = \sqrt{3}$.

Problema 6. En un triangle isòsceles, els dos costats iguals mesuren 10 centímetres cadascun.

Obteniu raonadament, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'expressió de l'àrea $A(x)$ del triangle, en funció de la longitud x del tercer costat. (4 *punts*)

b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$. (4 *punts*)

c) La longitud x del tercer costat perquè l'àrea del triangle siga màxima i el valor d'aquesta àrea. (2 *punts*)

Solució. a) $A(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$. b) La funció $A(x)$ creix en $[0, 10\sqrt{2}]$ i decreix en $[10\sqrt{2}, 20]$. c) L'àrea del triangle és màxima quan $x = 10\sqrt{2}$ i val 50 cm^2. L'àrea màxima també es pot obtenir a partir de l'expressió $A = \frac{1}{2}10^2 sin\alpha \leq \frac{1}{2}10^2$, on α és l'angle interior que formen els dos costats iguals del triangle

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real,

obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 *puntos*)

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$. (3 *puntos*)

c) La solución del sistema cuando $a = 0$. (2 *puntos*)

Solución. a) El determinante de la matriz de coeficientes vale $-(a-1)^2(a+2)$. El sistema es compatible cuando $a \neq 1$. Se valorará con dos puntos la conclusión de que el sistema es compatible determinado cuando $a \neq 1, -2$. Se asignan dos puntos a la comprobación de que el sistema es compatible indeterminado cuando $a = -2$ y un punto a la comprobación de que el sistema es incompatible cuando $a = 1$. b) $(x, y, z) = (1 + t, t, t)$, siendo t un parámetro real. c) $(x, y, z) = (2, -1, -1)$.

Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 *puntos*)

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha = 1$. (3 *puntos*)

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha = 1$. (4 *puntos*)

Solución. a) $\alpha = -1$. b) $x - y = 1$. c) El plano que pasa por P y es perpendicular a r es $\pi: x + y - z = 1$ y $d(Q, \pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 *puntos*)

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 2, x = 4$. (3 *puntos*)

Solución. a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0,1\}$. Las asíntotas verticales son $x = 0, x = 1$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. b) De $f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$ obtenemos $\int f(x)dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$. La primitiva cuya grafica pasa por el punto $(2,0)$ se obtiene cuando $C = \ln 2 - \frac{1}{2}$. Se valorará con tres puntos el cálculo de la integral indefinida y con un punto la primitiva que pasa por el punto $(2,0)$. c) Puesto que $f(x) > 0$ si $2 < x < 4$, el área viene dada por $\int_2^4 f(x)dx = -\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{9}{2}\right) = 1{,}25$ ...

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 *puntos*)

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. (3 *puntos*)

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

Solución. a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$ no es invertible nunca. Se valorará con 0,5 puntos el cálculo del producto y con 1 punto la comprobación de que la matriz no tiene inversa. $BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$ es invertible cuando $b \neq \pm\sqrt{6}$ (1,5 puntos). b) $A^T A = \begin{pmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ es invertible para cualquier valor del parámetro. c) $(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} (b^2 + 2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$.

Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,0)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. (4 *puntos*)

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A.
Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. (1+2 *puntos*)

c) La distancia entre el punto B y la recta r. (3 *puntos*)

Solució. a) La ecuación es $y + z = 1$. Se valorará con dos puntos el cálculo del vector característico del plano. b) La recta es $r: (x, y, z) = (1,2,-1) + t(2,1,-1)$, siendo t un parámetro real. c) $d(B, r) = \sqrt{3}$.

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 *puntos*)

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$. (4 *puntos*)

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 *puntos*)

Solución. a) $A(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$. b) La función $A(x)$ crece en $[0,10\sqrt{2}]$ y decrece en $\left[10\sqrt{2}, 20\right]$. c) El área del triángulo es máxima cuando $x = 10\sqrt{2}$ y vale 50 cm^2. El área máxima también se puede obtener a partir de la expresión $A = \frac{1}{2}10^2 sin\alpha \leq \frac{1}{2}10^2$, donde α es el ángulo interior que forman los dos lados iguales del triángulo.