PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2019	CONVOCATORIA: JULIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x & & +3z = \alpha \\ x & -2y & +2z = 5 \\ 3x & -y & +5z = \alpha+1 \end{cases}$, en què α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i determinat. (4 *punts*)
b) La solució del sistema quan $\alpha = -1$. (3 *punts*)
c) El valor de α per tal que el sistema tinga una solució (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *punts*)

Solució. a) El determinant de la matriu de coeficients del sistema val -1; per tant, el sistema és sempre compatible i determinat. b) $(x, y, z) = (7, -4, -5)$. c) La solució és $\alpha = 1$.

Problema A.2. Es dona el pla $\pi : \ 2x + y + 2z = 8$ i el punt $P = (10,\ 0,\ 10)$.
Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La distància del punt P al pla π. (3 *punts*)
b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos de coordenades. (4 *punts*)
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C. (3 *punts*)

Solució. a) $\frac{32}{3} \cong 10{,}66$ ul. b) 24 ua. c) $\frac{2^8}{3} = \frac{256}{3} \cong 85{,}33$ uv.

Problema A.3. Es dona la funció real h definida per $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.
Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ i $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *punts*)
b) L'asímptota de la corba $y = h(x)$. (2 *punts*)
c) La primitiva de la funció h (és a dir, $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ i la corba $y = h(x)$. (3 + 2 *punts*)

Solució. a) $]-\infty, +\infty[$. $+\infty, -\frac{3}{5}$. b) $y = x - 1$. c) $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C$, àrea = $8 + \ln 5$ ua.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de α per als quals l'equació matricial $AX = \alpha X$ sols admet una solució. (4 *punts*)

b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX = 5X$. (3 *punts*)

c) La comprovació que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *punts*)

Solució. a) $2 \neq \alpha \neq 5$. b) $(x, y) = \lambda(1, 1)$ per a qualsevol λ real. c) La solució és $\beta = 2^{100}$.

Problema B.2. Es donen en l'espai la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres reals α i β. (5 *punts*)

b) La distància entre la recta r i el pla π quan $\alpha = 6$ i $\beta = 3$. (3 *punts*)

c) L'equació del pla que passa per $(0, 0, 0)$ i que no talla al pla π. (2 *punts*)

Solució. a) Si $\beta \neq 3$, r i π es tallen en un punt; si $\beta = 3$ i $\alpha \neq 6$, r és paral· lela no continguda en π; si $\beta = 3$ i $\alpha = 6$, r està continguda en π. b) 0. c) $x + 2y + 3z = 0$.

Problema B.3. Un projectil està unit al punt $(0, 2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La funció de la variable x que expressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4 - x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0, 2)$. (2 *punts*)

b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \leq x \leq 2$. (2 *punts*)

c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \leq x \leq 2$. (2 *punts*)

d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \leq x \leq 2$. (4 *punts*)

Solució. a) $\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$. b) $(-2, 0)$ i $(2, 0)$. c) $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2})$ i $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2})$. d) $\frac{20}{3}$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z & = & \alpha \\ x & -2y & +2z & = & 5 \\ 3x & -y & +5z & = & \alpha+1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Solución. a) El determinante de la matriz de coeficientes del sistema vale -1, luego el sistema es siempre compatible y determinado. b) $(x, y, z) = (7, -4, -5)$. c) La solución es $\alpha = 1$.

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Solución. a) $\frac{32}{3} \cong 10{,}66$ ul. b) 24 ua. c) $\frac{2^8}{3} = \frac{256}{3} \cong 85{,}33$ uv.

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

Solución. a) $]-\infty, +\infty[$. $+\infty, -\frac{3}{5}$. b) $y = x - 1$. c) $\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C$, área = $8 + \ln 5$ ua.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Solución. a) $2 \neq \alpha \neq 5$. b) $(x, y) = \lambda(1, 1)$ para cualquier λ real. c) La solución es $\beta = 2^{100}$.

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Solución. a) Si $\beta \neq 3$, r y π se cortan en un punto; si $\beta = 3$ y $\alpha \neq 6$, r es paralela no contenida en π; si $\beta = 3$ y $\alpha = 6$, r está contenida en π. b) 0. c) $x + 2y + 3z = 0$.

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 *puntos*)

Solución. a) $\sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$. b) $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. c) $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2})$ y $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2})$. d) $\frac{20}{3}$.