GEOMETRÍA, DEMOSTRACIÓN Y ORDENADORES

Ángel Gutiérrez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia

Resumen. Las demostraciones y el lenguaje formal son los rasgos que más se identifican como característicos de la actividad matemática superior por los estudiantes de enseñanza secundaria o universitarios y por los licenciados en matemáticas. Esto lleva a que en muchas ocasiones los profesores de matemáticas vean el aprendizaje de la demostración como propio de los últimos cursos de enseñanza secundaria, momento en el que empiezan a enseñar a sus alumnos a realizar demostraciones formales. En este texto analizo las debilidades de tal postura y planteo la importancia de entender la demostración como una actividad genuinamente matemática que profesores y estudiantes deben realizar en todos los niveles educativos, empezando en los primeros cursos de la Enseñanza Primaria. También presento un ejemplo concreto de implementación de esta propuesta basado en la realización de actividades en las que el software de geometría dinámica juega un papel central como ayuda y motivador.

Abstract. Proofs and formal language are the features most often identified as characteristic of the higher mathematical activity by high school and university students and teachers. As a consequence, many mathematics teachers associate teaching proof to high school, and the first time students are asked to prove a statement is at high school, in a formal mathematics context. I analyze in this text the weaknesses of such position, and I argue in favour of understanding proof as a genuine mathematical activity to be accomplished by teachers and students at all educational levels, from the beginning of primary school. I also present an example to support this methodological proposal based on activities presented in a dynamic geometry software environment, where the software plays a central role as helper and motivator.

GEOMETRÍA, DEMOSTRACIÓN Y ORDENADORES

Ángel Gutiérrez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia

La demostración es uno de los elementos que integran el núcleo central que caracteriza la actividad matemática y que diferencia más claramente los métodos de trabajo de los matemáticos profesionales de los practicados por los profesionales de otras ciencias. Esto hace que aprender a demostrar haya sido siempre, desde la época de la Grecia clásica, uno de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas superiores.

No es mi objetivo hacer ahora un recorrido por la historia de la enseñanza de la demostración. Tan sólo me interesa recordar que, durante la segunda mitad del siglo XX, en todo el mundo hemos pasado por épocas de posturas dominantes extremas, tanto a favor como en contra de la demostración en enseñanza secundaria, hasta llegar a la situación actual en la que hay un consenso internacionalmente mayoritario entre profesores de matemáticas y didactas matemáticos sobre la necesidad de que los estudiantes terminen la enseñanza obligatoria habiendo comprendido la importancia y necesidad de la demostración en matemáticas y habiendo desarrollado habilidades de razonamiento deductivo, dejando el aprendizaje de la demostración formal para la enseñanza secundaria post-obligatoria y la universidad.

En España este objetivo dista bastante de ser real, como lo atestigua que el desarrollo del razonamiento matemático no se mencione en las listas de objetivos, contenidos ni criterios de evaluación del currículo de E. Primaria y que en el currículo de la E.S.O. el razonamiento matemático sólo aparezca al final del documento, como una diferencia entre las opciones A y B, mientras que el aprendizaje de la demostración tan sólo se menciona de manera indirecta, como una estrategia de resolución de problemas. Solamente en los currículos de Bachillerato se plantea explícitamente el objetivo de hacer demostraciones lógico-deductivas (me baso en los currículos oficiales actuales de la Comunidad Valenciana). Se hace imprescindible que los redactores de los nuevos currículos que se implanten en aplicación de la L.O.E. presten atención destacada a este tema en todos los niveles de enseñanza.

Es necesario, por tanto, profundizar en la tarea de lograr que los estudiantes de la enseñanza obligatoria practiquen las matemáticas de forma creativa y entiendan las matemáticas y, en especial, el razonamiento deductivo matemático como herramientas de razonamiento riguroso que les serán útiles en cualquier contexto docente, familiar, laboral, etc. Esta es una tarea de todos, redactores de currículos oficiales, autores de libros de texto y, principalmente, profesores. En este texto analizo las características del razonamiento matemático y de las demostraciones y muestro cómo, con la ayuda de herramientas adecuadas, como el software de geometría dinámica, es posible plantear en todos los niveles educativos actividades de geometría que ayuden a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de razonamiento matemático. En el enlace *publicaciones* de mi página web se encuentran los archivos de Cabri II+ que he utilizado en este artículo y en la ponencia correspondiente.

En la literatura de didáctica de las matemáticas, tanto española como internacional, se pueden encontrar publicaciones en las que se analizan los contenidos teóricos de este texto con más profundidad de lo que puedo hacer aquí. Ver, por ejemplo, las referencias incluidas en los enlaces *publicaciones* y *docencia* de mi página web y de la web del grupo de trabajo Aprendizaje de la Geometría de la Sociedad Española de Investigación en Educación matemática (S.E.I.E.M.).

Razonamiento deductivo y demostraciones

Entre los matemáticos profesionales, como entre los miembros de cualquier otra profesión, hay unas normas que regulan las formas válidas de expresión, de presentación de los resultados de sus investigaciones y de comunicación a través de los canales científicos, principalmente revistas y libros. Entre estas normas se encuentran las referidas a los requisitos que debe cumplir la demostración de un nuevo resultado para que sea admitido por la comunidad de matemáticos y pueda ser usado en el futuro para ayudar a demostrar nuevos teoremas. Me refiero, evidentemente, a cómo deben ser las demostraciones formales propias de los matemáticos profesionales.

Pero no hay que caer en el error de mitificar el lenguaje y la demostración formales y considerarlos la única forma válida de expresión, porque, en realidad, una demostración formal no es más que una manera muy sofisticada de expresión, mientras que lo realmente importante, lo que está en el centro de la actividad de creación matemática es el razonamiento deductivo riguroso.

Desde el punto de vista didáctico, es crucial que los profesores distingan claramente estos dos objetos y sus funciones: El razonamiento deductivo matemático es un proceso mental creativo, orientado generalmente a extraer conclusiones válidas de la información disponible. La demostración formal es un producto resultante de la intención de comunicar de una manera particular las conclusiones resultantes del proceso de razonamiento deductivo. Por tanto, nadie podrá escribir demostraciones formales mientras no sea capaz de hacer razonamientos deductivos rigurosos, pero sí es posible realizar razonamientos deductivos rigurosos aunque no se sepa expresarlos en forma de demostraciones formales.

Un análisis del concepto de demostración en las matemáticas escolares

Una consecuencia didáctica de la distinción hecha en los párrafos anteriores es que, en este contexto, el primer objetivo de la enseñanza de las matemáticas debe ser que los estudiantes aprendan a razonar deductivamente, mientras que el objetivo de que aprendan a escribir demostraciones formales debe estar subordinado a la consecución previa del otro.

Llevar a la práctica esta propuesta supone realizar unas transposiciones didácticas diferenciadas desde el mundo de los matemáticos profesionales a los mundos de los diferentes niveles educativos escolares (Primaria, ESO, Bachillerato) y de sus ciclos. Estas transposiciones didácticas se basan en la ampliación del significado de los conceptos matemáticos para que incluyan variantes que, no siendo admisibles en las matemáticas profesionales, forman parte de las matemáticas escolares. Así, en el contexto educativo, el concepto de razonamiento deductivo riguroso debe dar paso al de razonamiento matemático y el concepto de demostración formal debe dar paso al de demostración matemática, con los siguientes significados:

Razonamiento matemático es cualquier forma de razonamiento, inductivo o deductivo, orientado a analizar información matemática o a extraer conclusiones a partir de ella.

Demostración matemática es cualquier forma de argumento matemático, empírico o abstracto, inductivo o deductivo, orientado a explicar o justificar convincentemente la veracidad de una afirmación o conjetura.

Mi propuesta central en este texto es que las asignaturas de matemáticas de todos los niveles educativos, desde el comienzo de Primaria, deben incluir los objetivos de i) plantear a los estudiantes actividades para cuya resolución deban razonar matemáticamente y ii) pedirles, siempre que sea posible, que demuestren las soluciones, afirmaciones o conjeturas resultantes de dichos procesos de razonamiento, es decir que creen argumentos, adecuados a su capacidad de razonamiento matemático, dirigidos a convencer a los demás de la veracidad de sus afirmaciones, conjeturas o soluciones.

Para implementar estas concepciones de razonamiento y de demostración en el contexto de un curso particular de matemáticas, podemos analizarlas desde varios puntos de vista, todos igualmente importantes:

- *Qué creencias y concepciones tienen los alumnos* de qué es demostrar y de en qué consiste hacer una demostración. Como primer paso para lograr que los estudiantes empiecen a hacer demostraciones, es necesario que entiendan la conveniencia y utilidad de hacerlas. Por otra parte, dado que el proceso normal de aprendizaje supone empezar haciendo demostraciones empíricas, para que los estudiantes pasen a hacer demostraciones deductivas, es necesario que entiendan las limitaciones de las demostraciones empíricas y la conveniencia del razonamiento deductivo abstracto.

- *Qué contenidos matemáticos son aceptables* como parte de una demostración. Una característica de las matemáticas es su estructura jerárquica, que se traduce en que sólo se pueden usar como elementos de un argumento deductivo aquellos contenidos matemáticos (principalmente definiciones y teoremas) que han sido previamente estudiados y aceptados por la comunidad de la clase. De esta manera se transmite a los estudiantes la visión de que las matemáticas son un producto social que crece a partir de la actividad de los miembros de la sociedad.

- *Qué forma de expresión son aceptables* para comunicarse matemáticamente. Una demostración es una secuencia de argumentos que deben ser expresados mediante el lenguaje de las matemáticas. En el lenguaje matemático, como en cualquier otro lenguaje, las formas de expresión son importantes, y los profesores deben prestar atención a que los estudiantes se expresen con corrección adecuada a sus posibilidades. Los profesores deben mantener el equilibrio entre permitir a sus alumnos usar un vocabulario intuitivo, que les resulta más fácil y próximo, y el progresivo aprendizaje de los términos matemáticos correctos.

- *Qué formas de argumentación o demostración son aceptables.* A lo largo de los años, los estudiantes deben perfeccionar sus formas de razonamiento. Este progreso es lento, por lo que suele ser difícil de evaluar por un profesor que sólo está con un grupo de estudiantes durante un curso. El modelo de razonamiento de Van Hiele es un instrumento que ha demostrado ser muy útil en esta tarea, especialmente en el contexto de la geometría.

Debido a las limitaciones de espacio, en las siguientes páginas me centraré en este último punto de vista, presentando ejemplos de actividades de geometría que pueden ser resueltas por estudiantes de diferentes niveles de razonamiento, utilizando diversos tipos de razonamiento y de demostraciones.

Los niveles de Van Hiele

El modelo de razonamiento matemático de Van Hiele describe las diferentes formas de razonamiento que podemos encontrar en los individuos, desde quienes empiezan a estudiar matemáticas en Educación Infantil y Primaria hasta los matemáticos profesionales. Se describen cinco niveles de razonamiento que, de forma muy sintética, se caracterizan en el contexto de la geometría de la siguiente manera:

Nivel 1. El razonamiento es puramente visual y físico. Los elementos o partes de una figura geométrica que se identifican (por ej., lados o vértices) no tienen carácter matemático, sino de elementos físicos. Los argumentos o razonamientos de los estudiantes se basarán en descripciones o exhibiciones de características físicas de las figuras u objetos geométricos. Por tanto, en este nivel no se debe esperar que los estudiantes desarrollen razonamientos matemáticos, ni se les debe pedir todavía realizar demostraciones, pero sí que expliquen sus respuestas.

Nivel 2. Es el inicio del razonamiento matemático. Las figuras geométricas, sus elementos y propiedades ya tienen carácter matemático. Los argumentos o razonamientos de los estudiantes son inductivos, pues se basan en la observación o manipulación de ejemplos concretos, a partir de los cuales generalizan propiedades matemáticas. Sus demostraciones son de tipo empírico, es decir comprobaciones de que la conjetura se verifica en una cantidad pequeña de ejemplos (a veces sólo en uno).

Nivel 3. Es el inicio del razonamiento matemático lógico deductivo. Los estudiantes de este nivel aprenden a diferenciar los elementos de un enunciado (hipótesis y tesis) y entienden el concepto de dependencia lógica de una propiedad respecto de otra. Sus razonamientos y demostraciones, aunque deductivos, tienen un carácter informal, lo cual se refleja, por una parte, en su necesidad de apoyarse en la manipulación de un ejemplo concreto que les guía en la creación de la demostración y, por otra parte, en su incapacidad para escribir demostraciones formales y usar la simbología matemática formal.

Nivel 4. En este nivel se comprende la ventaja del razonamiento lógico deductivo formal sobre las formas de razonamiento típicas de los niveles anteriores. Los estudiantes ya pueden entender la estructura de un sistema axiomático y el papel de cada elemento (términos no definidos, axiomas, definiciones, teoremas). Son capaces de realizar razonamientos totalmente abstractos, desligados de cualquier ayuda concreta y basados sólo en la manipulación de las definiciones o teoremas aceptados de acuerdo con las reglas de la lógica formal, así como de escribir demostraciones formales.

Nivel 5. Representa el nivel máximo de rigor y abstracción en el razonamiento matemático. Su característica diferenciadora del nivel anterior es la capacidad para trabajar en sistemas axiomáticos diferentes y para comprender que la veracidad o falsedad de una afirmación matemática no es absoluta, sino que depende del "mundo" en el que nos encontremos.

En una enseñanza de las matemáticas de calidad, en la que los estudiantes desempeñen un papel activo y participativo, un objetivo razonable de aprendizaje de las destrezas de razonamiento y demostración es que los estudiantes inicien la adquisición del segundo nivel de razonamiento al comienzo del ciclo superior de Primaria, que en la E.S.O. completen la adquisición de este nivel de razonamiento e inicien la adquisición del tercero, de manera que un estudiante típico termine la E.S.O. siendo capaz de realizar razonamientos y demostraciones deductivos abstractos informales. Por último, todos los estudiantes de Bachillerato deberían completar la adquisición del tercer nivel de razonamiento y los de las especialidades científicas iniciar la toma de contacto con el cuarto nivel de razonamiento.

Los ordenadores en las clases de matemáticas. La geometría dinámica

En las páginas anteriores he expuesto algunos elementos didácticos teóricos que un profesor debe tener en cuenta para organizar la enseñanza de la demostración y para evaluar adecuadamente las respuestas o soluciones a problemas de sus alumnos. En el resto del texto presentaré un ejemplo para mostrar cómo es posible graduar a lo largo de los cursos los problemas que se propongan a los estudiantes, de acuerdo con sus diferentes capacidades de razonamiento y con los objetivos planteados de aprendizaje del razonamiento matemático y de la demostración.

En los primeros cursos de Primaria la mayoría de los estudiantes tienen unas formas de razonamiento matemático muy similares, pero en el tercer ciclo, durante la E.S.O. y el Bachillerato las diferencias entre unos estudiantes y otros empiezan a hacerse mayores. Un elemento clave en este contexto de diversidad es plantear problemas que puedan resolverse de diferentes maneras dependiendo de los niveles de razonamiento de los estudiantes. Los programas educativos de ordenador actuales son una inestimable ayuda para los profesores en el logro de este objetivo. Entre éstos están los juegos de introducción de los conceptos y operaciones aritméticos, los programas de cálculo algebraico simbólico, de representación gráfica de funciones, de simulaciones probabilísticas y estadísticas, y de geometría dinámica. En particular, la investigación en didáctica de las matemáticas muestra claramente que, si se posibilita que los estudiantes utilicen de manera habitual un programa de geometría dinámica, éstos pueden adquirir con más profundidad y rapidez los conceptos geométricos estudiados y progresar en sus habilidades de razonamiento deductivo y demostración.

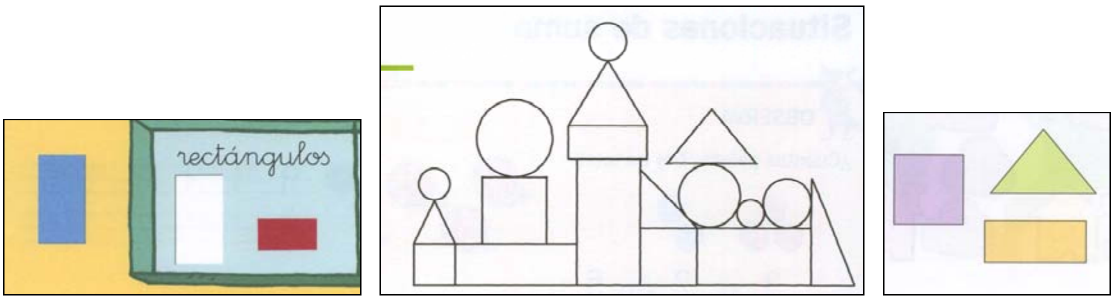
Hay numerosos programas de geometría dinámica. Algunos son comerciales, como Cabri, Cinderella o Geometer's Sketchpad, y son muy potentes. Otros son gratuitos o muy baratos, como Regla y Compás, Geogebra, Spherical Easel, Geup y una infinidad de applets que pueden encontrarse en internet, y son más modestos que los comerciales pero cubren suficientemente las necesidades de la mayoría de profesores de Primaria y Secundaria.

La principal característica común a todos los programas de geometría dinámica es que ofrecen al usuario la posibilidad de modificar de manera continua y en tiempo real la forma de las figuras construidas, "sujetando" con el cursor alguno de sus elementos y "arrastrándolo" por la pantalla, de manera que las características matemáticas de esas figuras se mantienen durante la transformación.

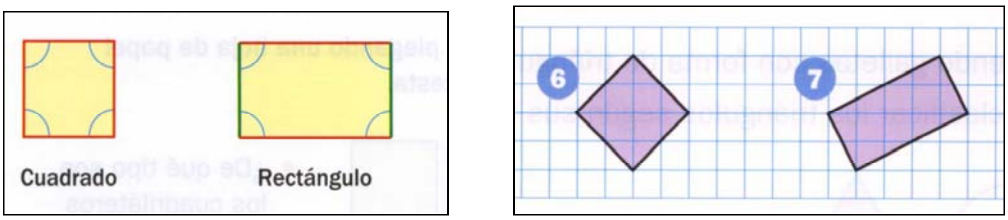
En las siguientes páginas presento un ejemplo de planteamiento de una secuencia de problemas sobre el aprendizaje del rectángulo, desde la toma de contacto inicial con el concepto hasta el estudio de algunas propiedades suyas por métodos avanzados. En todos los problemas se debe enfatizar la necesidad de que los estudiantes expliquen o demuestren las afirmaciones y conjeturas que hagan. Aunque estos problemas pueden resolverse con papel y lápiz, pretendo mostrar las ventajas que pueden obtenerse si los estudiantes los resuelvan con un programa de geometría dinámica. Otra característica de esta secuencia de problemas es que cada problema puede ser resuelto usando diferentes niveles de razonamiento, lo cual permite desarrollar las diferentes capacidades que habitualmente encontramos entre los estudiantes de una clase.

Actividad 1. Aprendiendo el concepto de rectángulo

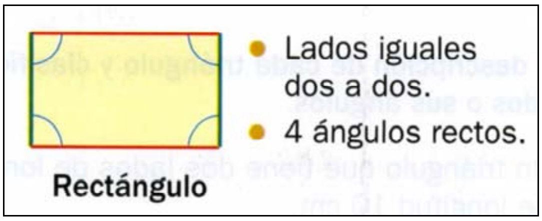
Los niños de los primeros cursos de Primaria estudian las características básicas de las figuras geométricas planas. Dado que se encuentran en el primer nivel de razonamiento, su aprendizaje debe basarse en la observación y manipulación. Para que el aprendizaje sea más profundo y completo, es imprescindible que los niños experimenten la mayor variedad posible de formas, tamaños, posiciones, etc. de las familias de figuras geométricas que estudien. En este sentido, los libros de texto suelen ser muy pobres, pues se limitan a presentar unos pocos casos prototípicos de figuras de cada familia, además con muy poca variedad visual.



Primero de Primaria



Cuarto de Primaria



Quinto de Primaria.

Figura 1. Ejemplos para la enseñanza del rectángulo en los textos de Primaria.

La figura 1 muestra rectángulos dibujados en libros de texto de Primaria; en los textos de los otros cursos de Primaria y los de E.S.O. la pobreza de ejemplos es análoga. Se observa el dominio total de los prototipos de rectángulos con lados verticales y horizontales, pues muy raramente ven los niños rectángulos en otras posiciones. Por otra parte, puede observarse que todos los rectángulos son muy similares en su forma.

Por el contrario, si proporcionamos a los niños de Primaria, incluso de primer curso, un archivo de geometría dinámica con un rectángulo construido y les pedimos que arrastren los vértices, verán rectángulos como los de los libros de texto, pero también verán una enorme variedad de rectángulos diferentes; los mostrados en la figura 2 son sólo una mínima muestra de los que ve un niño con sólo dedicar un minuto a arrastrar el ratón por la pantalla.

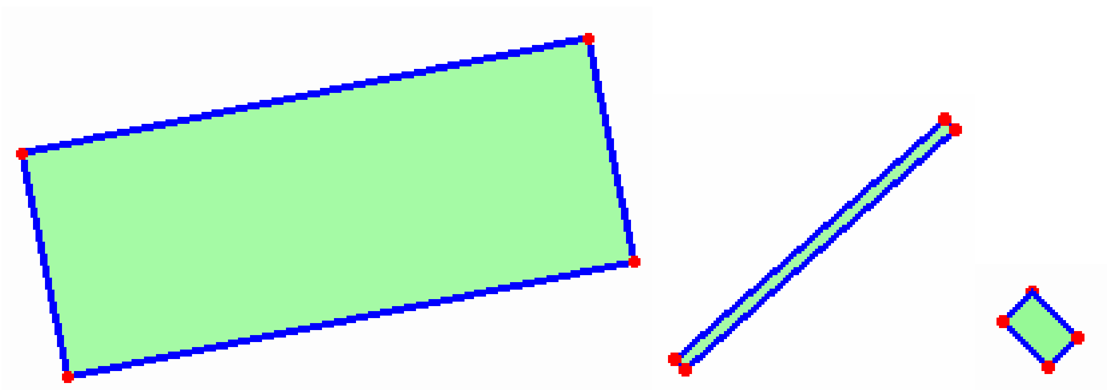


Figura 2. Ejemplos para la enseñanza del rectángulo en el ordenador.

Esta primera actividad (para ciclo inicial de Primaria), de manipulación, debe ir acompañada de preguntas sobre la forma del rectángulo, su posición en la pantalla, la cantidad de lados, las longitudes de los lados, comparación de unos rectángulos con otros, etc. El profesor también pedirá a sus alumnos que señalen los lados y los vértices. El profesor sólo debe admitir una respuesta como válida si, además de ser correcta, incluye algún comentario explicándola o justificándola; por ejemplo, al señalar los vértices deberían decir qué es un vértice: "Éste, éste, éste y éste son los vértices, porque son las esquinas del rectángulo."

Actividad 2. Descubriendo propiedades de los rectángulos

La transición del primer al segundo nivel de razonamiento se empieza a inducir cuando se enseñan a los niños otros elementos de los polígonos diferentes de los lados y los vértices. En Primaria se estudian, como mínimo, los ángulos y las diagonales (figura 3).

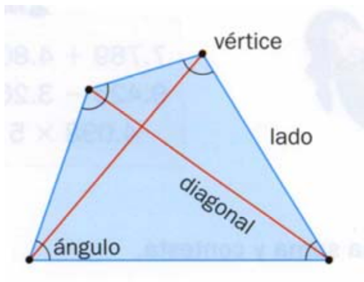


Figura 3. Enseñanza de elementos de un polígono (4º de Primaria).

Para la segunda actividad, los niños abren un archivo con un rectángulo construido y el profesor les pide que construyan las diagonales del rectángulo. En primer lugar, los niños harán movimientos de arrastre y contestarán a preguntas sobre la forma del rectángulo y sus diagonales, sus posiciones en la pantalla, etc.

A continuación los niños añadirán medidas de longitudes a los lados y las diagonales (figura 4) y, mientras arrastran una vez más los vértices del rectángulo, observarán regularidades en las longitudes de los lados, de las diagonales, compararán las medidas de las diagonales de unos rectángulos con otros, etc. Llegarán a conclusiones como: Los lados opuestos siempre miden lo mismo; las diagonales siempre miden lo mismo; las diagonales tienen mayor longitud que los lados; las diagonales se cortan en dos partes iguales; etc.

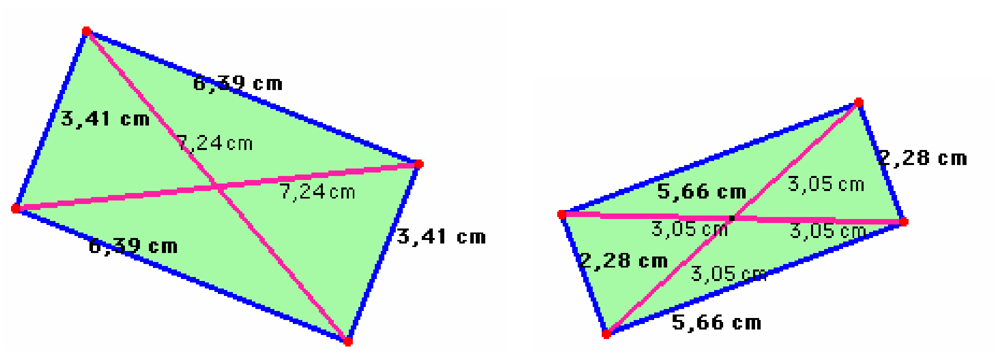


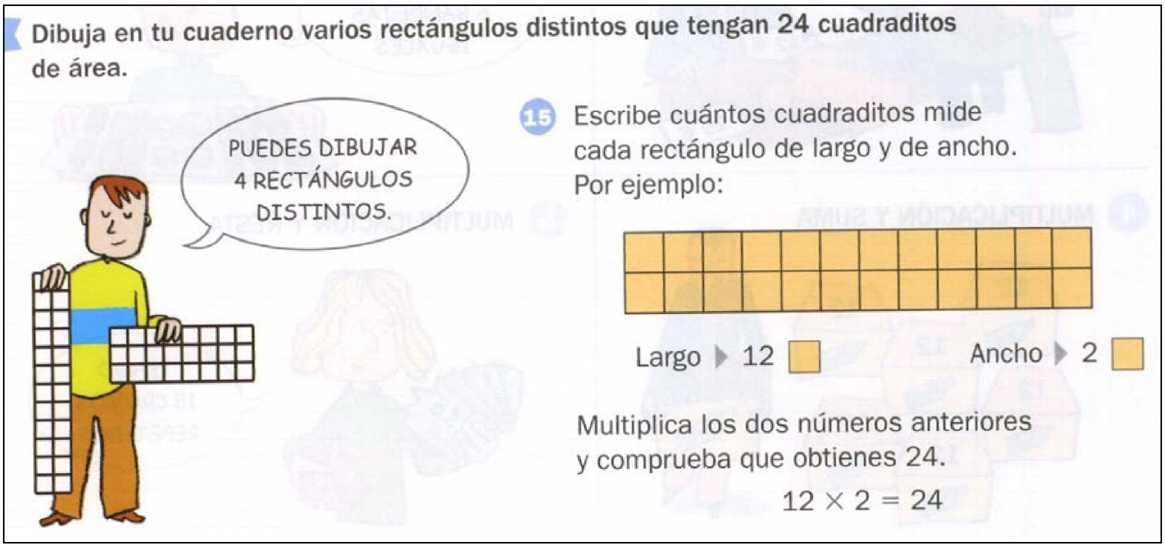
Figura 4. Enseñanza de elementos del rectángulo y descubrimiento de sus propiedades métricas en el ordenador.

Como en la actividad 1, una respuesta será válida si, además de ser correcta, incluye algún comentario explicándola o justificándola. En la primera parte de esta actividad, igual que en la actividad anterior, las justificaciones que debemos esperar son de tipo visual, típicas del primer nivel de razonamiento, pero en la segunda parte de esta actividad los niños deben incluir referencias a las medidas de las longitudes que han observado. Esta introducción de elementos del rectángulo en las justificaciones (segmentos, longitudes, etc.) es el inicio del razonamiento del segundo nivel, en el que los estudiantes mostrarán una gran capacidad de generalización de propiedades a partir de su observación en ejemplos concretos y ya podemos empezar a hablar de demostraciones empíricas.

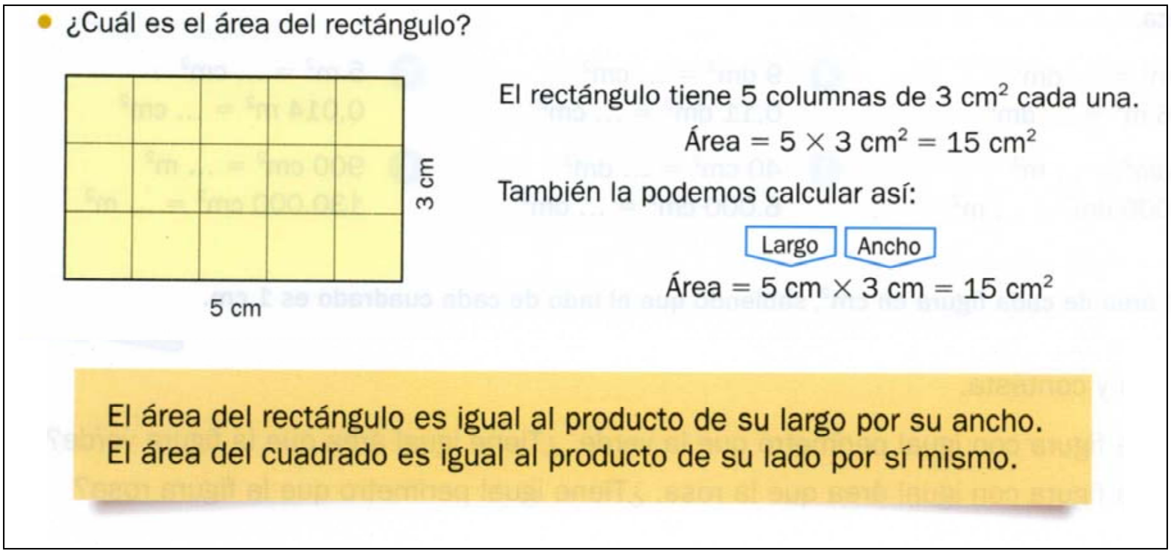
Una actividad análoga a ésta puede plantearse midiendo los ángulos entre lados y/o diagonales del rectángulo y haciendo preguntas sobre esos ángulos.

Actividad 3. La fórmula de cálculo del área de un rectángulo

Uno de los pasos siguientes en el estudio de los polígonos, a partir de 3º de Primaria, es el estudio de sus perímetros y áreas y de las fórmulas de cálculo de áreas para los tipos de polígonos que las tienen. En el caso del cuadrado y el rectángulo, el procedimiento habitual en los textos de Primaria es presentar unos pocos ejemplos (¡en ocasiones sólo uno!) de estos polígonos dibujados sobre papel cuadriculado para que los niños cuenten la cantidad de cuadrados y vean la relación de este valor con las longitudes de sus lados (figura 5); a continuación el libro enuncia la fórmula correspondiente. Es una pena que los textos no permitan a los estudiantes la rica actividad de descubrir estas fórmulas por sí mismos, pues el propio ejemplo que plantean incluye la solución.



3º de Primaria.

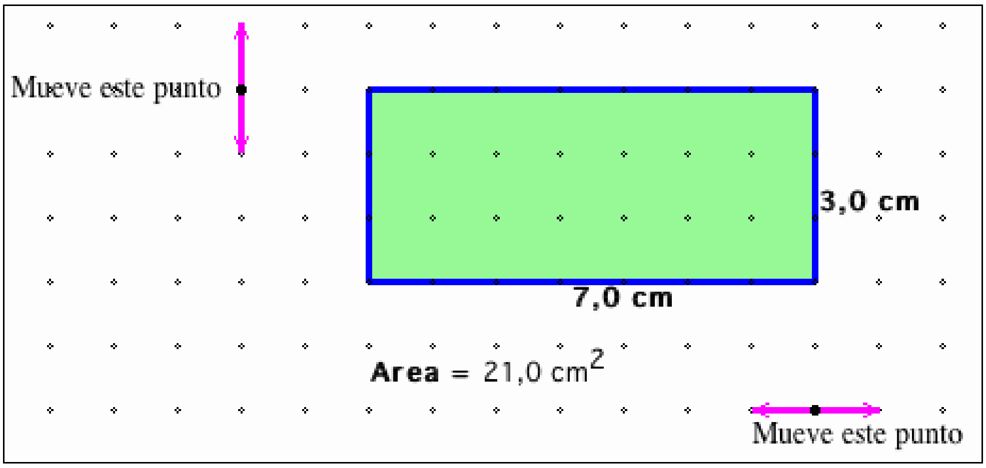


5º de Primaria.

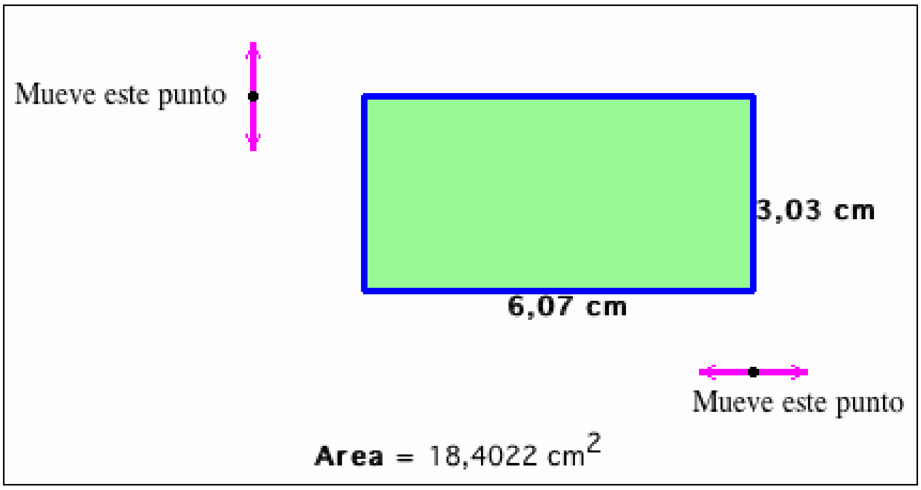
Figura 5. Enseñanza de la fórmula del área del rectángulo en Primaria.

Aquí también es muy interesante usar un programa de geometría dinámica, pues se puede plantear una actividad real de *descubrimiento*. Por otra parte, que el ordenador haga los cálculos ayuda a agilizar los recuentos, evita los errores de conteo de los niños, permite observar una mayor variedad de ejemplos y, si el profesor lo desea, se pueden usar rectángulos cuyos lados no tengan medidas exactas. La actividad que propongo para descubrir la fórmula es típica para estudiantes que ya han adquirido el segundo nivel de razonamiento, pues deben medir lados y áreas, comparar sus valores y generalizar la relación que han descubierto.

Los estudiantes abren un archivo que contiene un rectángulo cuya base siempre es horizontal y cuyos vértices sólo pueden desplazarse sobre los puntos de una retícula con 1 cm. de lado (figura 6a). Esta restricción tiene como finalidad ayudar a los niños de Primaria a identificar la relación entre lados y área, pues es imposible que la descubran con longitudes no enteras (¡hay que tener cuidado con los redondeos!). Puesto que esta actividad va dirigida a estudiantes que ya razonan de acuerdo con el segundo nivel, no variar la inclinación del rectángulo no supone ningún obstáculo de comprensión para ellos.



-a-



-b-

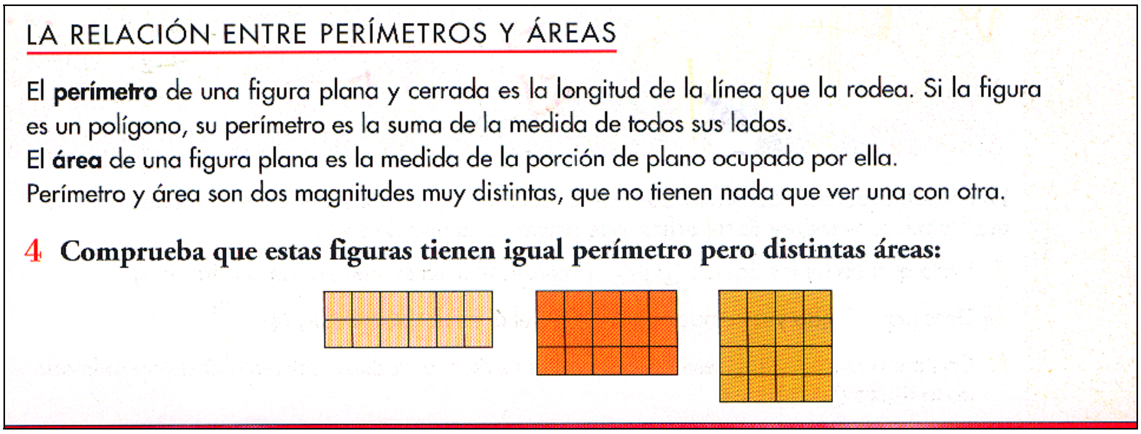
Figura 6. Descubrimiento de la fórmula del área del rectángulo en el ordenador.

Si es necesario, el profesor puede pedir a los estudiantes que completen una tabla con diferentes valores de base, altura y área para guardar la información. En el contexto de la enseñanza por descubrimiento, el desarrollo de la actividad comienza recogiendo información sobre los valores de base, altura y área, sigue planteando una conjetura y, finalmente, se debe volver a usar el ordenador para observar nuevos ejemplos, con longitudes enteras y no enteras (figura 6b) y confirmar la conjetura. La verificación de estos últimos ejemplos será la demostración empírica, propia del segundo nivel de razonamiento, de esta propiedad de los rectángulos.

Actividad 4. Los rectángulos isoperimétricos (1)

Una vez que los estudiantes de Primaria han aprendido las fórmulas del área de rectángulos y cuadrados, se les deben plantear actividades más abiertas para afianzar estos nuevos conocimientos. Una actividad muy interesante es el clásico problema de los rectángulos isoperimétricos: *De* *entre todos los rectángulos que tienen un mismo perímetro prefijado, ¿qué rectángulo tiene el área máxima?* Cuando planteo este problema a mis alumnos futuros maestros y profesores de secundaria, añado otra pregunta: *¿Qué rectángulo tiene el área mínima?*

Aunque a los estudiantes de Primaria se les puede plantear este problema en una hoja de papel cuadriculado (figura 7), la actividad resulta mucho más rica si se plantea con un programa de geometría dinámica de manera que los estudiantes puedan arrastrar de forma continua un vértice del rectángulo y tengan información permanente sobre las longitudes de los lados y el área del rectángulo (figura 8).


LA RELACIÓN ENTRE PERÍMETROS Y ÁREAS

El **perímetro** de una figura plana y cerrada es la longitud de la línea que la rodea. Si la figura es un polígono, su perímetro es la suma de la medida de todos sus lados.
El **área** de una figura plana es la medida de la porción de plano ocupado por ella.
Perímetro y área son dos magnitudes muy distintas, que no tienen nada que ver una con otra.

4 Comprueba que estas figuras tienen igual perímetro pero distintas áreas:

Figura 7. Los rectángulos isoperimétricos en un texto de 1º de E.S.O.

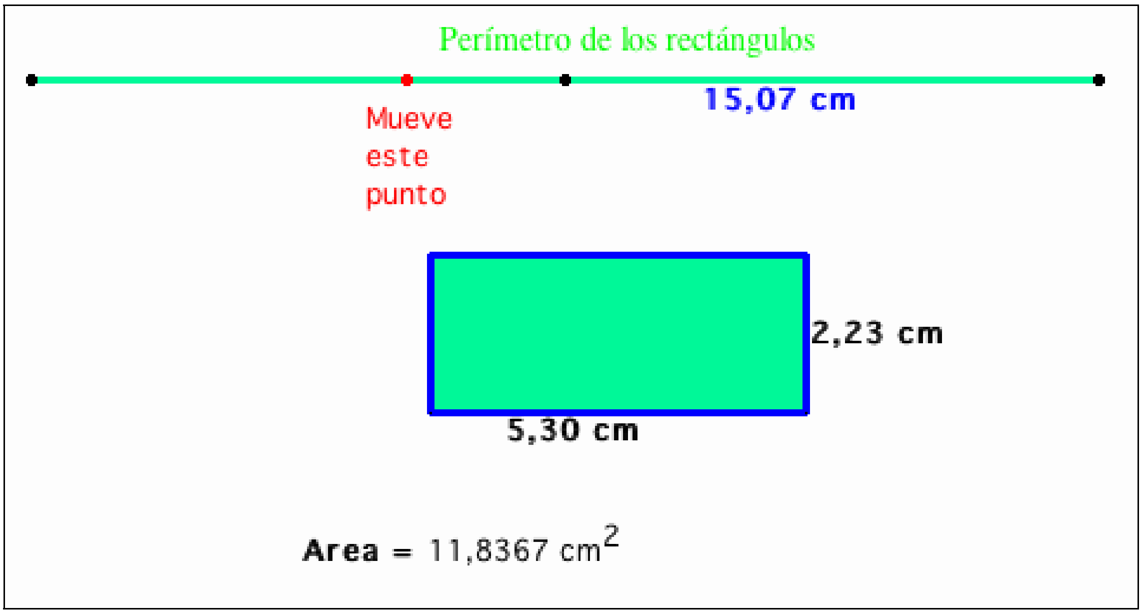


Figura 8. Presentación numérica del problema de los rectángulos isoperimétricos en el ordenador.

Aunque resolver formalmente el problema de los rectángulos isoperimétricos está fuera del alcance de los estudiantes de Primaria y E.S.O., éste es un ejemplo paradigmático de cómo un mismo problema puede plantearse en varios cursos diferentes, o a estudiantes de capacidades y conocimientos diferentes, de forma que sea resuelto con distintos niveles de rigor según el nivel de razonamiento de los resolutores. En el caso del ciclo superior de Primaria, nos encontramos ante estudiantes razonando en el segundo nivel de Van Hiele, por lo que los maestros deben esperar respuestas y demostraciones de tipo empírico. Una forma típica de resolver empíricamente este problema con el ordenador consiste en desplazar el punto rojo a izquierda y derecha observando la variación de la medida del área del rectángulo, haciendo movimientos cada vez más pequeños hasta llegar a la posición en que el valor de la medida del área es máximo. La demostración que hagan estos niños de que el rectángulo de área máxima es el cuadrado se basará en mostrar que, cuando se mueve un poco el punto a derecha o izquierda, el valor de la medida del área decrece y que, cuando este valor es máximo, los lados del rectángulo miden lo mismo.

Actividad 5. Los rectángulos isoperimétricos (2)

En E.S.O. se empiezan a estudiar las funciones mediante la resolución de problemas en los que hay que interpretar y dar significado a curvas que representan determinados fenómenos, procesos o relaciones funcionales, primero observando de manera global las curvas (figura 9), después analizando algunas de sus características como crecimiento o decrecimiento (figura 10), y también relacionando las diferentes formas de representación de una función (verbal, tabular, gráfica y algebraica) en ejemplos sencillos (figura 11).

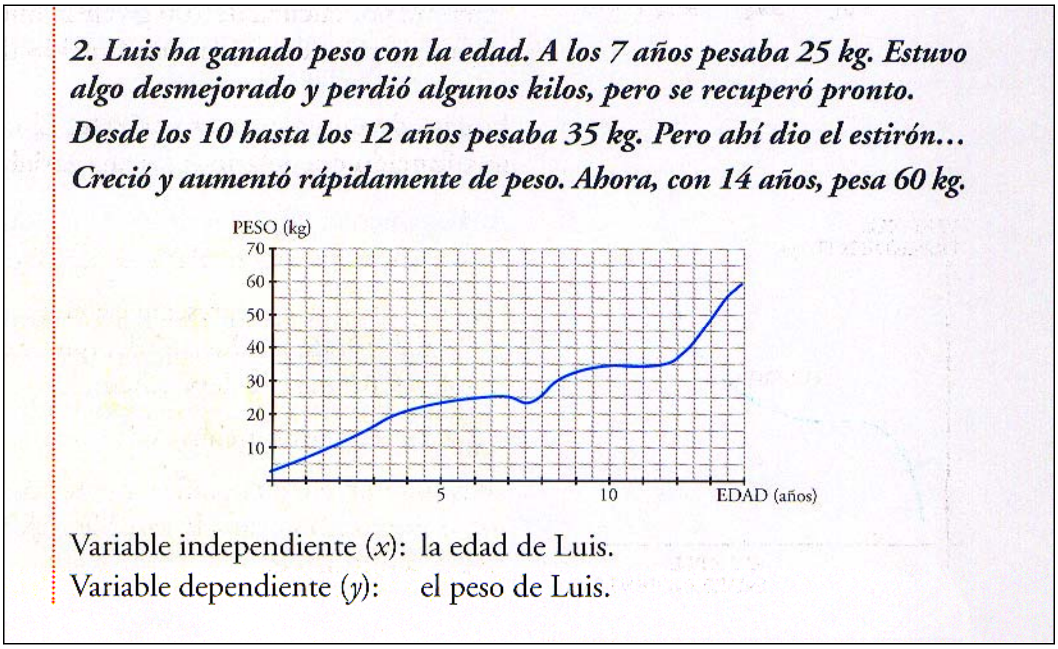


Figura 9. Dando significado a la gráfica de una función en un texto de 1º de E.S.O.

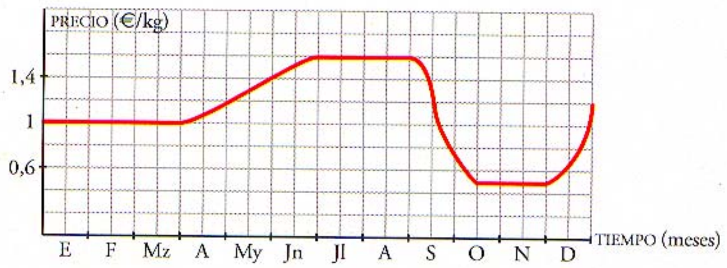
EJEMPLO

El precio de las naranjas varía del siguiente modo a lo largo de un año:

Al comienzo del año (enero, febrero, marzo), el precio se mantiene estable, a 1 €/kg.

En abril empieza a subir y sigue subiendo hasta final de junio. Se mantiene estable en julio y agosto. Baja desde septiembre hasta la mitad de octubre y sube en diciembre. (Puedes ver la gráfica debajo).

Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de esta función.

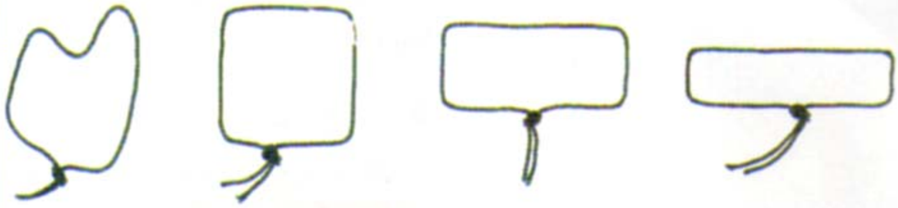


La función es **creciente** de abril a junio y en diciembre, es **decreciente** en septiembre y en la primera mitad de octubre, y se mantiene estable (**constante**) el resto del año.

Figura 10. Dando significado al crecimiento y decrecimiento de una función en un texto de 2º de E.S.O.

EJEMPLO

Con un hilo de una longitud de 20 cm, cuyos extremos están atados entre sí, formamos rectángulos:



Las bases, las alturas y las áreas de algunos posibles rectángulos se dan en la tabla:

BASE	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ALTURA	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ÁREA	9	16	21	24	25	24	21	16	9

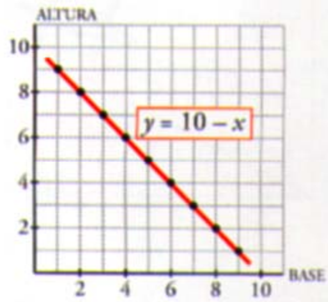
Representar gráficamente las funciones: *BASE → ALTURA*

BASE → ÁREA

- FUNCIÓN *BASE → ALTURA*

Si llamamos x a la base e y a la altura, la función que las relaciona tiene la ecuación: $y = 10 - x$.

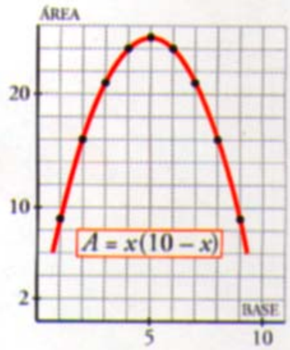
Se representa mediante una recta.



- FUNCIÓN *BASE → ÁREA*

Si llamamos x a la base y A al área de estos rectángulos, obtenemos la siguiente tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	16	21	24	25	24	21	16	9



La ecuación de esta función es:

$$A = x\,(10 - x)$$

Si representamos estos puntos, la línea continua que une a todos ellos tiene la forma que ves a la derecha.

Figura 11. El problema de los rectángulos isoperimétricos en un texto de 2º de E.S.O.

En E.S.O. debemos lograr que los estudiantes superen la aproximación puramente numérica a la solución del problema de los rectángulos isoperimétricos que proponía para Primaria y plantearlo desde un punto de vista funcional: Hay una relación (conocida por los estudiantes de E.S.O.) entre el área de un rectángulo, su base y su altura, dada por la expresión A = bxh, pero hay otra relación (inicialmente oculta) entre la altura y la base, condicionada por el hecho de tener el perímetro fijo. Para realizar esta actividad con un programa de geometría dinámica, podemos presentar a los estudiantes un archivo en el que, además de la información geométrica y numérica (figura 8) haya una representación cartesiana de la relación entre área y base de los rectángulos (figura 12). Al desplazar el punto rojo, se dibuja la representación gráfica de la función A = f(b), cuyo máximo coincide con el momento en que el rectángulo se convierte en cuadrado.

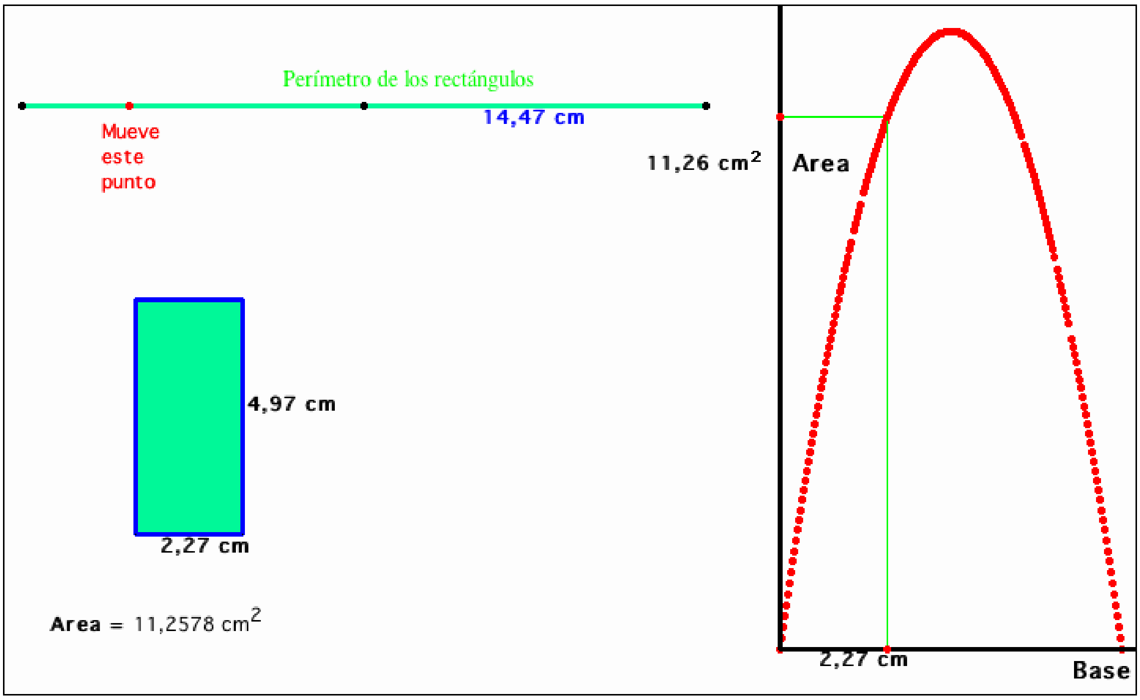


Figura 12. Presentación funcional numérica y gráfica del problema de los rectángulos isoperimétricos en el ordenador.

En la E.S.O. debe iniciarse el aprendizaje del razonamiento lógico deductivo abstracto (nivel 3 de Van Hiele) y los profesores deben empezar a pedir a sus alumnos que elaboren pequeños razonamientos deductivos informales, propios del inicio de la adquisición del tercer nivel de razonamiento. Generalmente se tratará de argumentos verbales, poco elaborados y con defectos, pero en los cuales deben empezar a incluir conexiones entre propiedades por medio de implicaciones lógicas. Este progreso en el uso de razonamiento deductivo abstracto, primero informal y luego más formalizado, se puede observar comparando los libros de texto de 2º y 3º de E.S.O. mostrados en las figuras 11 y 13: Mientras que en 2º las fórmulas que relacionan la base con altura y la base con el área del rectángulo se obtienen informalmente a partir de dos tablas de valores dadas en el enunciado (aunque también las podrían obtener los estudiantes), en 3º el mismo proceso de cálculo es completamente algebraico y la tabla de valores sólo se usa al final para dibujar la gráfica correspondiente.

En el caso del problema de los rectángulos isoperimétricos, el profesor, antes de intentar que los estudiantes encuentren la expresión algebraica de esta función, pedirá a sus alumnos que, después de manipular el rectángulo del ordenador, expliquen por qué la función tiene forma de parábola, por qué el máximo de la curva señala el rectángulo de área máxima, y por qué ese rectángulo es el cuadrado. El profesor debe inducir a los estudiantes a rechazar las respuestas puramente numéricas y a discutir sobre la solución en un contexto abstracto, en términos de propiedades de los rectángulos o de la curva y no sólo refiriéndose a los valores numéricos de base, altura y área. Por ejemplo, una respuesta aceptable para justificar que la gráfica tiene forma de parábola puede aludir a que, al desplazar el punto rojo a izquierda y derecha de la posición de máxima área, aparecen los mismos rectángulos pero girados 90º (la base y la altura cambian sus papeles), por lo que a izquierda y derecha del máximo tenemos los mismos valores y, por tanto, la gráfica debe ser simétrica.

Este argumento puede ayudar también a los estudiantes de E.S.O. a justificar que, al ser la curva simétrica, el máximo es su punto medio, por lo que la base mide la mitad de la longitud total del recorrido, y entonces el rectángulo de área máxima tiene la base y la altura iguales, por lo que es un cuadrado.

El progreso en el estudio de las funciones a lo largo de los cursos de la E.S.O. (figuras 9, 10, 11 y 13) irá acompañado del uso de construcciones en el ordenador que incluyan nuevas posibilidades, de acuerdo con los requerimientos matemáticos del curso. Así, el paso siguiente en el uso del ordenador puede ser ayudar a comprender las relaciones entre los diferentes elementos de los rectángulos (perímetro, base, altura y área) y a entender cómo obtener la expresión algebraica de la función $A = f(b)$. El software puede calcular dicha expresión y, por tanto, confirmar la veracidad o no de los cálculos hechos por los estudiantes (figura 14).

El corral

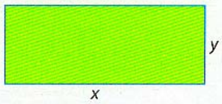
Problema

Pepe posee una granja y quiere ampliar su negocio mediante la cría de avestruces. Dispone de 100 m de valla para construir un corral rectangular de la mayor superficie posible donde guardar los ejemplares que ha adquirido. «¿Qué dimensiones debe tener el corral?», se pregunta Pepe.

Solución

Busca una función que relacione datos e incógnitas

Como lo único que sabe Pepe es que el perímetro del corral rectangular que quiere construir es de 100 m, para hallar sus dimensiones, plantea la siguiente ecuación:



$$2x + 2y = 100 \Leftrightarrow x + y = 50 \Leftrightarrow y = 50 - x$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula del área del rectángulo, Pepe concluye:

$$A_{\text{rectángulo}} = x \cdot y = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$$

Luego, el problema consiste en encontrar el valor de x que hace máxima esta última expresión. Como es una función cuadrática, Pepe decide representarla.

Estudia la gráfica de la función

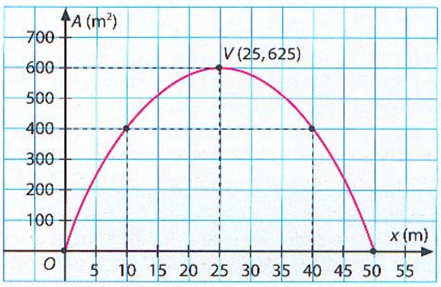
La representación gráfica de la función $A = -x^2 + 50x$ es una parábola. Para dibujarla se halla su eje, su vértice y alguno de sus puntos:

$$A = -x^2 + 50x \Rightarrow a = -1,\ b = 50,\ c = 0$$

- Eje: $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{50}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-50}{-2} = 25 \Rightarrow x = 25$
- Vértice: $A_0 = -{x_0}^2 + 50x_0 = -(25)^2 + 50 \cdot 25 = 625 \Rightarrow V(25, 625)$
- Tabla de valores:

x	…	0	10	25	40	50	…
A	…	0	400	625	400	0	…

- Gráfica de la función:



Así, la gráfica anterior y, por tanto, la función área alcanzan su máximo en $x = 25$. Luego, el corral rectangular de mayor área es el que tiene por dimensiones $x = 25$ e $y = 50 - x = 50 - 25 = 25$. Es decir, se trata de un cuadrado de 25 m de lado.

Figura 13. El problema de los rectángulos isoperimétricos en un texto de 3º de E.S.O.

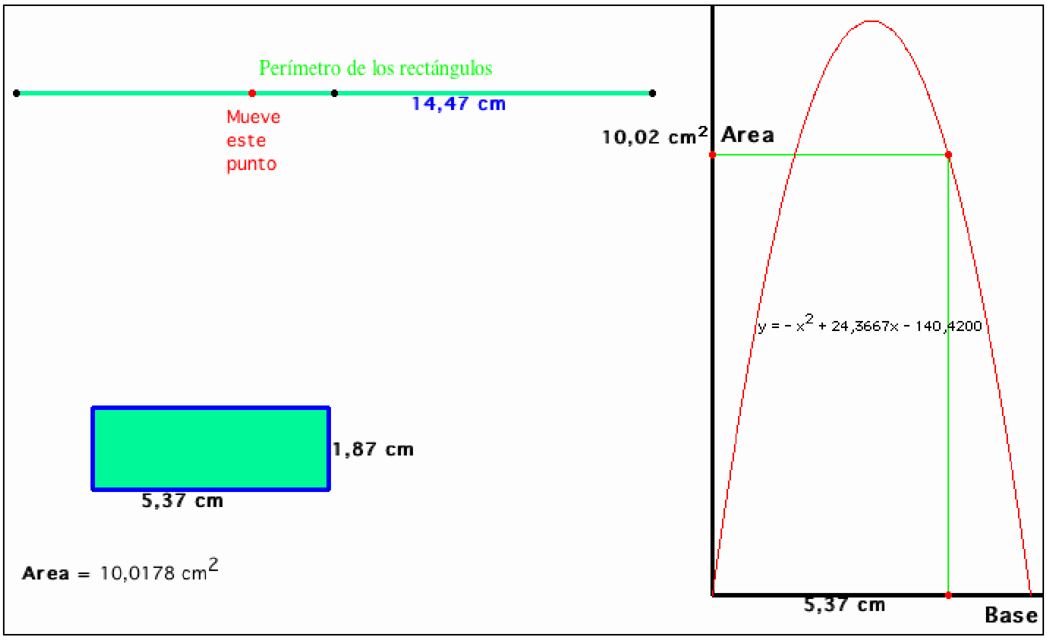


Figura 14. Presentación funcional numérica, gráfica y analítica del problema de los rectángulos isoperimétricos en el ordenador.

Actividad 6. Los rectángulos isoperimétricos (3)

Los estudiantes de la E.S.O., incluso los que ya hayan adquirido el tercer nivel de razonamiento, todavía carecen de las destrezas de razonamiento y de los conocimientos matemáticos necesarios para resolver formalmente el problema de los rectángulos isoperimétricos, es decir demostrar formalmente la conjetura de que el rectángulo de área máxima es el cuadrado. En Bachillerato, cuando se estudian la derivada de una función y su forma de aplicación para calcular máximos y mínimos de funciones, el profesor puede plantear de nuevo este problema para que ahora lo resuelvan de manera formal, con la ayuda de la derivada.

Se trata, en este caso, de que el profesor propicie un contexto en el que sus alumnos puedan iniciar el acceso al cuarto nivel de razonamiento, analizando las deficiencias de las demostraciones de esta conjetura hechas en E.S.O. y, estando los estudiantes convencidos de que la respuesta que conocen es correcta, entiendan la conveniencia de explicar y justificar matemáticamente esta conjetura que en cursos anteriores sólo demostraron de manera informal haciendo más uso de la intuición y la visualización que de las relaciones matemáticas abstractas.

Todo material didáctico de matemáticas, desde el más simple hasta el más sofisticado, tiene un campo de acción en el que resulta útil y tiene unos límites, fuera de los cuales su uso, más que una ayuda, resulta ser un obstáculo o, en el mejor de los casos, una pérdida de tiempo. En el caso del software de geometría dinámica, uno de los límites que tiene es el terreno del razonamiento deductivo formal. Es necesario que profesores y estudiantes sean conscientes de que un programa de geometría dinámica puede ayudar a encontrar ideas para hacer una demostración, pero no puede hacer la demostración ni, tan solo, puede señalar hacia la dirección correcta. Para los estudiantes que están iniciando la adquisición del razonamiento formal, un programa de geometría dinámica puede ser una excelente ayuda para representar fácilmente un problema, para observar regularidades, para añadir o quitar elementos auxiliares, para verificar conjeturas, etc. Pero la manipulación del ordenador será, en todo caso, paralela al uso del razonamiento formal y de la manera formal de expresar las ideas matemáticas, de modo que los ordenadores se quedarán parados cuando los estudiantes empiecen a escribir la demostración formal de la conjetura que han encontrado y enunciado.

Conclusión

En las páginas anteriores he esbozado un marco teórico en el que basar la enseñanza del razonamiento matemático y la demostración a lo largo de las enseñanzas Primaria y Secundaria. También he mostrado un ejemplo de cómo es posible plantear a los estudiantes de todos los niveles educativos actividades y problemas en los que el razonamiento matemático sea un componente importante para analizar información, elaborar conjeturas y organizar demostraciones de estas conjeturas. Con ello he querido reforzar la idea de que no podemos esperar al Bachillerato para enseñar a los estudiantes a razonar y demostrar formalmente, sino que esta formación debe iniciarse desde el primer momento de la enseñanza obligatoria para que, al terminar la enseñanza obligatoria, todos los estudiantes hayan aprendido, al menos, la base del razonamiento matemático deductivo.

Hace 24 años, en las Terceras JAEM (Zaragoza, 1983), contamos con la presencia de Hans Freudenthal. En una conferencia que tituló *¡En todos los niveles, geometría!*, Freudenthal planteó la necesidad de una sólida formación geométrica para todos los individuos, la cual debía empezar en los primeros años de la escolarización y seguir de manera continua hasta la universidad. Esta necesidad sigue estando vigente hoy, complementada con la necesidad de una sólida formación en razonamiento matemático. Como resumen final de la propuesta metodológica y didáctica que he planteado en este texto, me voy a permitir parafrasear a Freudenthal para terminar diciendo:

¡En todos los niveles, demostración!

Ángel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia
angel.gutierrez@uv.es
http://www.uv.es/Angel.Gutierrez