Modelos y propuestas para el enriquecimiento curricular en matemáticas

Adela Jaime Pastor y Angel Gutiérrez Rodríguez

Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

1. Introducción

Quiénes somos

Somos profesores de didáctica de las matemáticas.

Repartimos nuestro tiempo de docencia entre la Escuela de Magisterio, la Facultad de Matemáticas, y el Programa de Doctorado del Departamento. Además realizamos investigación en didáctica de las matemáticas dirigida a proporcionar a profesores y estudiantes información y herramientas para mejorar la práctica de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos de primaria, secundaria y universidad. Por otra parte, estamos en contacto con la comunidad internacional de didáctica de las matemáticas a través de publicaciones, congresos y trabajo conjunto con colegas de otros países.

Por qué estamos aquí

Desde hace algunos años, y de manera más intensa durante el curso pasado, hemos visto la carencia de material y de herramientas a disposición de los profesores en ejercicio para trabajar con alumnos de AA.CC. Han sido muchos los contactos con padres y profesionales de la enseñanza que se han manifestado en este sentido en conversaciones privadas.

Resulta inviable que cada profesor o equipo de un centro diseñe el material apropiado, sustitutorio o complementario de lo que emplea para la mayoría de la clase cada vez que se presenta un caso de AA.CC. Además del tiempo necesario, el trabajo de un profesor requiere continuidad a lo largo de los diversos cursos. El profesor necesita asesoramiento y apoyo sobre formas de organizar las clases y los recursos que puede utilizar. Si un profesor tiene a su disposición información sobre las posibilidades que existen, ya parte de propuestas concretas que puede utilizar, adaptar, modificar o crear su propio material.

Empezamos a hablar con maestros y compañeros de Didáctica de la Matemática con el fin de crear un equipo de trabajo dirigido a diseñar material organizado para atender a alumnos de AA.CC. en el área de Matemáticas. En principio, nuestra propuesta iba dirigida a la Enseñanza Primaria, dado que en E. Secundaria hay algo más hecho (por ejemplo, el proyecto Estalmat, dirigido a estudiantes de 12 a 14 años, y algunas series inglesas de libros con material de enriquecimiento curricular para matemáticas). En el equipo debía haber profesionales de la enseñanza, expertos en métodos de organización y gestión de las clases, además de personas interesadas en el proyecto.

Cuando conocimos este programa de enriquecimiento curricular con atención a niños de AA.CC., nos pusimos en contacto con su coordinador, quien nos dio la oportunidad de participar en él.

2. Una propuesta de colaboración

La didáctica de las matemáticas tiene como objetivos últimos:

1) promover la mejora del aprendizaje de las matemáticas, y

2) promover la mejora de la enseñanza, como elemento necesario para conseguir el objetivo anterior.

Pero la didáctica de las matemáticas no sólo se preocupa de dar a los profesores unas directrices sobre cómo puede ser más eficaz enseñar un tema de matemáticas. Lamentablemente no existen recetas de éxito seguro, porque los estudiantes y los profesores son distintos y, como todos sabemos por propia experiencia, cualquier forma de enseñanza tiene más éxito con unos estudiantes y unos profesores y menos con otros. Las propuestas de enseñanza que tienen más éxito son las que aportan flexibilidad para que los profesores puedan aplicarlas de una forma u otra dependiendo de sus estilos de enseñanza y de los alumnos concretos que tienen en ese momento. Por eso, la didáctica de las matemáticas se preocupa también de analizar la problemática de la enseñanza y aprendizaje en su conjunto para elaborar modelos teóricos que ayuden a entender cómo se pueden hacer las cosas y qué, cómo y cuándo modificar o añadir en una programación previamente elaborada para adaptarla a las necesidades específicas de los alumnos con los que se está trabajando.

En la Resolución (21/10/2008, DOCV de 28/10/2008) que autoriza la realización de este programa de innovación, se pueden leer estos objetivos generales y concretos. No los destacamos porque pensemos que son los más importantes, sino porque son los más próximos a lo que creemos que podemos aportar a este programa en relación con la formación matemática de los estudiantes:

Primero. Finalidad

Autorizar ... un programa experimental ... de innovación educativa, para **profundizar en el desarrollo de las competencias básicas,** para **fomentar el**

enriquecimiento curricular ..., con el fin de ... generar buenas prácticas **para su posterior difusión** ...

Cuarto. Objetivos

Los objetivos específicos de este programa experimental son los siguientes:

1. Ampliar las **técnicas de enriquecimiento intelectual** en las programaciones didácticas ...

5. Prestar especial atención a la **innovación en la metodología de la enseñanza** de competencias relacionadas **con las nuevas tecnologías** ...

6. **Trabajar con coordinación y planificación para rentabilizar** los recursos humanos, organizativos, curriculares y extracurriculares ...

8. **Generar** ... **actividades de ampliación y profundización de los aprendizajes para todo el alumnado**. ...

12. ... **dotar a los centros de propuestas, materiales** para el alumnado y el profesorado, **criterios organizativos y formas de trabajo** ...

Nuestra propuesta de colaboración se basa en unir vuestra experiencia, como profesores de primaria y secundaria, para enfrentar el día a día en las aulas con nuestra experiencia en didáctica de las matemáticas para aportar visiones globales apoyadas en modelos o marcos teóricos que permitan organizar el conjunto de actividades de matemáticas de forma homogénea, coherente y secuenciada entre los centros o los cursos específicos. Al mismo tiempo nuestra experiencia investigadora facilita la búsqueda de información generada en otros países y el contacto con grupos de trabajo que puedan aportar información útil para elaborar nuestros propios materiales de enseñanza.

Esta idea, llevada a la práctica, significa que, cuando se decida empezar a elaborar materiales curriculares en un tema específico podremos aportar ideas teóricas y prácticas, publicaciones y materiales concretos que ayuden a empezar a trabajar. Más adelante, a lo largo de la experimentación, podemos aportar ideas y sugerencias para mejorar o completar el material que se esté preparando, para organizarlo o para complementar con análisis didácticos los documentos que haya que elaborar como conclusión de esta experiencia de innovación.

3. Algunas ideas sobre la formación matemática de los estudiantes de altas capacidades y superdotados

Tanto desde enfoques disciplinares como globales, los estudiosos de la problemática de la enseñanza de estos niños apuntan a dos modelos de enseñanza:

- Enseñanza mediante profundización en los contenidos del curso que les corresponde.

- Enseñanza mediante aceleración en el aprendizaje de los contenidos del currículo ordinario.

Además, se ofrece un tercer modelo de enseñanza:

- Enseñanza mediante introducción de nuevos contenidos extracurriculares.

Estos nuevos contenidos son temas interesantes o atractivos, que no se estudian en el currículum ordinario, pero que pueden aportar una gran riqueza a la formación matemática y general de los niños de altas capacidades y superdotados. Algunos ejemplos son: Desarrollo de las capacidades de visualización e imaginación espacial. Aprendizaje de estrategias de cálculo mental y estimación. Uso de software educativo para realizar actividades y resolver problemas. Aprendizaje detallado de las isometrías y su utilización como instrumento de apoyo en otros temas de matemáticas y en otras áreas disciplinares. Participación en entornos virtuales de aprendizaje colaborativo, por ejemplo creando equipos de estudiantes con altas capacidades de varios centros del proyecto.

Los expertos no se ponen de acuerdo en que un modelo sea mejor que los otros, y existen argumentos convincentes en defensa de cada uno. Esta falta de acuerdo indica claramente que, en realidad, ninguno de los modelos es “el” bueno, y que todos tienen sus ventajas y sus inconvenientes, que no se debe optar por uno de ellos como norma general obligatoria, si no que hay que analizar las características de cada caso (del estudiante, del colegio y sus profesores, del entorno familiar, etc.) y las posibilidades de llevar a cabo lo que se considera óptimo para tomar una decisión. Probablemente, la decisión más acertada sea una vía intermedia que combine profundización, nuevos temas extracurriculares y aceleración.

Nuestra opinión es que, como pauta general en matemáticas, conviene trabajar en primer lugar en profundizar en los contenidos del curso, añadir nuevos contenidos extracurriculares y, sólo cuando lo anterior no sea posible, o si los requisitos del alumno así lo aconsejan, ir a la aceleración. En este sentido, el currículo de matemáticas de primaria no es homogéneo, pues algunos temas, fundamentalmente de aritmética, son poco adecuados para la profundización, porque no hay en qué profundizar, mientras que otros, mayoritariamente de geometría, probabilidad y estadística, tienen más posibilidades de profundización. Por el contrario, cuando avanzamos en los cursos de ESO y Bachillerato, encontramos cada vez más posibilidades de profundización en cualquier tema, porque se trata de temas más complejos que permiten a los profesores buscar elementos complementarios útiles e interesantes en los que trabajar. Un reflejo de esto es que la mayor parte de publicaciones sobre trabajo en matemáticas con niños superdotados se basan en cursos de secundaria.

Desde el punto de vista de las metodologías de enseñanza de las matemáticas a niños de altas capacidades o superdotados, todos los expertos coinciden en que hay que evitar la enseñanza rutinaria y memorística basada en aprenderse los contenidos del libro de texto y hacer unos cuantos ejercicios de aplicación inmediata. La alternativa es una metodología activa con más protagonismo para los estudiantes. Entre las metodologías de enseñanza que podemos utilizar están:

- Organizar la enseñanza basada en resolución de problemas.

- Plantear investigaciones en temas interesantes para los estudiantes.

- Presentar conexiones entre diferentes temas de matemáticas o de matemáticas y otras áreas (por ejemplo física).

- Presentar aplicaciones de las matemáticas a situaciones de la vida real de los niños (por ejemplo en problemas relacionados con precios).

- Plantear investigaciones para que las resuelvan mediante consultas en internet o uso de software educativo.

Se puede recurrir a una combinación de varias de ellas.

En cuanto a la resolución de problemas, sabemos que son un tema del currículo oficial de matemáticas de primaria y de secundaria. Esto quiere decir que la resolución de problemas juega un doble papel, como contexto y como contenido, es decir como forma de enseñanza de otros contenidos (descubrimiento de nuevos conceptos y propiedades) y como objeto de enseñanza en sí misma (métodos de resolución de problemas). Ambos papeles son importantes y útiles, y se pueden combinar.

La enseñanza basada en la resolución de problemas consiste en elegir cuidadosamente conjuntos de problemas que conduzcan a los estudiantes a descubrir nuevos contenidos matemáticos como consecuencia del trabajo que tienen que hacer para resolverlos. Por ejemplo, plantear en Primaria o ESO una serie de problemas de reparto equitativo nos puede llevar a comprender el concepto de fracción y a descubrir la aritmética de las fracciones. Otro ejemplo, plantear en 1º de bachillerato una serie de problemas sobre velocidades de automóviles nos puede llevar a descubrir el concepto de derivada y su definición formal mediante la interpretación geométrica de la derivada.

Por otra parte, la resolución de problemas por el puro placer del reto de resolverlos da pie a la enseñanza de métodos y herramientas de resolución de problemas. Sería el caso, por ejemplo, de preparación para unas olimpiadas, que son independientes de los contenidos matemáticos subyacentes.

4. Algunos ejemplos de enseñanza de matemáticas a estudiantes de altas capacidades y superdotados

Hemos comentado antes que parte de nuestra aportación a este programa de innovación se puede basar en proporcionar marcos teóricos a los profesores que van a diseñar los nuevos materiales de enseñanza y a realizar los experimentos de enseñanza, con el fin de que se puedan utilizar como instrumentos para definir objetivos de enseñanza, para organizar coherentemente los contenidos y actividades, para graduarlos de forma que sean útiles a niños con diferentes capacidades (que es uno de los objetivos principales de este programa de innovación), para valorar las respuestas de los estudiantes y para evaluar su progreso en el aprendizaje. A continuación presentamos, de forma muy esquemática, algunos ejemplos de cómo un marco teórico adecuado puede ayudar a los profesores en esta tarea de diseñar unidades de enseñanza que respondan a las necesidades de los alumnos de altas capacidades y superdotados pero que, al mismo tiempo y dentro de lo posible, sean útiles también al resto de alumnos de los centros.

Ejemplo 1: Los problemas aritméticos de sumas y restas en Primaria.

Los temas de aritmética de los cuatro primeros cursos de primaria se dedican prioritariamente a enseñar a contar, algunas propiedades de los números relacionadas con el sistema decimal de numeración y las cuatro operaciones aritméticas. Una parte importante de estos temas debe ser la resolución de problemas aritméticos, que sirven para que los niños perciban los diversos significados de cada operación. En didáctica de las matemáticas se ha investigado exhaustivamente toda la problemática relacionada con los procesos de resolución de problemas aritméticos y con las dificultades de los estudiantes para resolverlos. Por ejemplo, se han identificado diversas variables que inciden en la dificultad de los problemas. También se han clasificado los problemas en varios tipos que responden a diferentes significados de las operaciones aritméticas.

En lo referente a los problemas de sumas y restas, se identifican cuatro tipos que, de manera muy resumida, tienen las siguientes características:

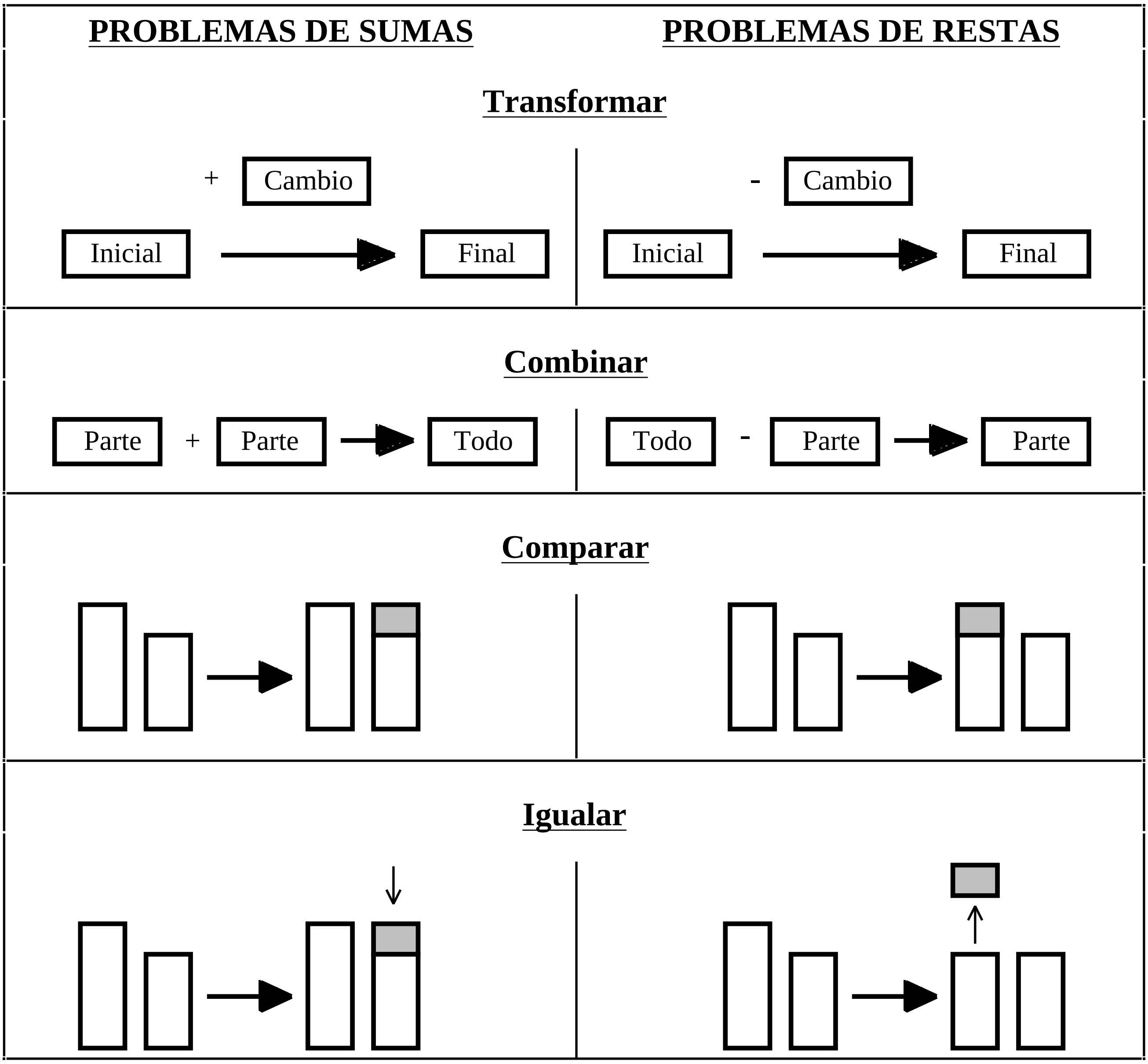
<u>Problemas de transformar</u>, en los cuales hay un conjunto inicial de objetos, una transformación que hace que la cantidad de objetos en este conjunto aumente o disminuya, y un conjunto final de objetos.

<u>Problemas de combinar</u>, en los cuales hay dos conjuntos de objetos que unas veces se juntan y otras veces se separan.

<u>Problemas de comparar</u>, en los cuales hay dos conjuntos de objetos, uno mayor que el otro, y se quiere averiguar cuántos objetos más o menos tiene uno que el otro.

<u>Problemas de igualar</u>, en los cuales hay dos conjuntos de objetos, uno mayor que el otro, y se quiere averiguar cuántos objetos hace falta añadir o quitar de un conjunto para que tenga tantos objetos como el otro.

Gráficamente, estos son los cuatro tipos de problemas de sumas y restas:



Este modelo de clasificación de problemas permite a los profesores, por una parte, analizar los problemas que van a plantear a sus alumnos, para darse cuenta de si hay la variedad adecuada de casos, y, por otra parte, seleccionar unos tipos u otros de problemas según la dificultad que quieran que tengan los problemas, pues los tipos de comparar e igualar son más difíciles que los otros.

Los siguientes ejemplos muestran cómo una misma situación (las manipulaciones con caramelos) se modifica para convertirla en cada uno de los cuatro tipos de problemas y, en cada tipo, en cada una de las seis formas posibles dependiendo de la operación aritmética y del término que hay que calcular (para no resultar reiterativos, sólo aparecen las seis formas en el primer tipo de problemas):

PROBLEMAS DE SUMAS	PROBLEMAS DE RESTAS
Transformar	
$3 + 5 = \square$ Juan tenía 3 caramelos. Ana le ha dado otros 5 caramelos. ¿Cuántos tiene Juan ahora?	$8 - 5 = \square$ Juan tenía 8 caramelos. Ana le ha cogido 5 caramelos. ¿Cuántos tiene Juan ahora?
$3 + \square = 8$ Juan tenía 3 caramelos. Ana le ha dado algunos más. Ahora Juan tiene 8 caramelos. ¿Cuántos le ha dado Ana?	$8 - \square = 3$ Juan tenía 8 caramelos. Ana le ha cogido varios. Ahora Juan tiene 3 caramelos. ¿Cuántos le ha cogido Ana?
$\square + 5 = 8$ Ana le ha dado 5 caramelos a Juan. Ahora Juan tiene 8 caramelos. ¿Cuántos tenía Juan al principio?	$\square - 5 = 3$ Ana le ha cogido 5 caramelos a Juan. Ahora Juan tiene 3 caramelos. ¿Cuántos tenía Juan al principio?
Combinar	
$3 + 5 = \square$ Juan tiene 3 caramelos de fresa y 5 caramelos de naranja. ¿Cuántos caramelos tiene Juan en total?	$8 - 5 = \square$ Juan tiene 8 caramelos. De ellos, 5 son de fresa y los demás son de naranja. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene Juan?
Comparar	
$3 + 5 = \square$ Ana tiene 3 caramelos, que son 5 caramelos menos que los que tiene Juan. ¿Cuántos caramelos tiene Juan?	$8 - 5 = \square$ Juan tiene 8 caramelos, que son 5 caramelos más que los que tiene Ana. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?
Igualar	
$3 + 5 = \square$ Ana tiene 3 caramelos. Si le damos a Ana otros 5 caramelos, tendrá tantos caramelos como Juan. ¿Cuántos caramelos tiene Juan?	$8 - 5 = \square$ Juan tiene 8 caramelos. Si le cogemos 5 caramelos, tendrá tantos caramelos como Ana. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?

Al leer los enunciados de los problemas de comparar de la tabla anterior puede parecer que están equivocados: El hecho de que aparezca la palabra "más" en el enunciado de la columna de los problemas de restas y la palabra "menos" en el enunciado de la columna de los problemas de sumas podría llevarnos a pensar que están al revés. En realidad, lo que clasifica a estos dos problemas como de sumas o de restas es cómo los interpreta cada estudiante concreto. Así, un estudiante puede resolver el problema de la columna de sumas como en la tabla, añadiendo caramelos en el montón de Ana hasta que haya tantos como en el de Juan, mientras que otro estudiante puede resolver el mismo problema cogiendo caramelos del montón de Juan hasta que queden tantos como en el de Ana. En el primer caso es un problema de sumas y en el segundo caso es un problema de restas.

Se trata, no obstante, de una peculiaridad de este tipo de problemas, que desde el punto de vista de una clasificación formal son ambiguos, pero que para un profesor que está en su escuela con sus alumnos no es importante, porque lo que le importa en último término es que los niños entiendan estas situaciones y las resuelvan correctamente. Si planteamos, por ejemplo, el problema de $3 + \boxed{} = 8$, los niños de los primeros cursos de Primaria, que seguramente todavía están contando con los dedos de las manos, van a resolverlo contando con los dedos desde 3 hasta 8, por lo que han hecho una suma. Sin embargo los niños de los cursos intermedios o superiores de Primaria o los niños más pequeños de altas capacidades, que ya dominan bien estas operaciones, harán mentalmente la resta 8 - 3 = 5, porque ya son capaces de relacionar la suma y la resta.

En cualquier caso, lo importante de esta clasificación es que nos ayuda a darnos cuenta de que las diferentes formas de enunciados presentan a los estudiantes distintos significados de los conceptos de suma y resta. También que, aunque la operación directa que resuelve el problema es una suma o una resta, el enunciado verbal del problema hace que varíe su dificultad y, posiblemente, la estrategia que utilicen los alumnos en la resolución sea distinta. Resolver problemas variados, en el momento adecuado, enriquecerá el aprendizaje de los estudiantes.

Ejemplo 2: Las definiciones de los cuadriláteros en Primaria y ESO.

En la enseñanza de la geometría, la didáctica de las matemáticas ofrece un marco de referencia muy útil e interesante, denominado “niveles de razonamiento matemático de Van Hiele”, que ha demostrado en numerosas ocasiones su eficacia para organizar el currículo escolar de geometría, e incluso de toda la asignatura de matemáticas.

A grandes rasgos, las características generales de los cuatro niveles de razonamiento matemático que identifica el modelo de Van Hiele son las siguientes:

Nivel 1 (de reconocimiento): Las figuras se perciben de manera global, como objetos físicos. No se puede trabajar con sus elementos matemáticos ni con sus propiedades matemáticas, ni se tiene capacidad para generalizar las observaciones hechas en una figura específica.

Nivel 2 (de análisis): Se reconocen elementos matemáticos de las figuras, así como propiedades matemáticas de éstas, pero no se tiene la capacidad para establecer relaciones lógicas (de implicación o dependencia) entre unas propiedades matemáticas y otras. Se generalizan propiedades de las figuras a partir de su comprobación u observación empírica en unos pocos ejemplos. Las demostraciones son empíricas y consisten en mostrar ejemplos en los que se verifica la afirmación que se quiere demostrar.

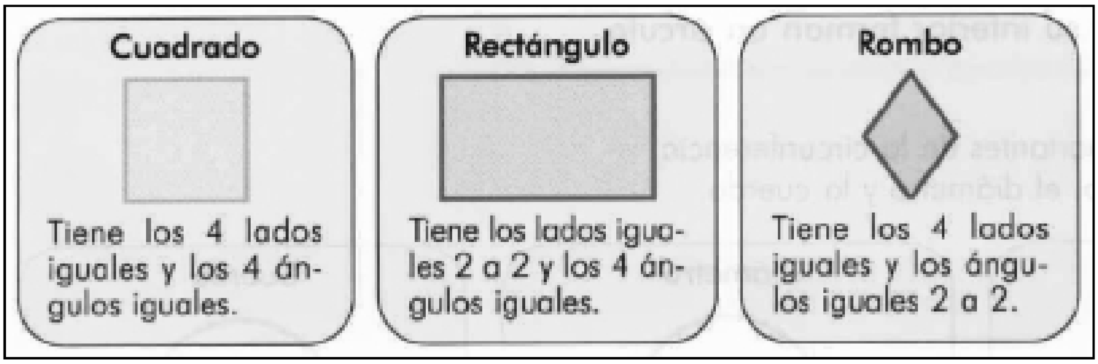
Nivel 3 (de clasificación): Se es capaz de establecer relaciones lógicas entre propiedades matemáticas. Los estudiantes entienden y utilizan implicaciones de uno o unos pocos pasos. También entienden cómo formular una definición. Todavía no se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (de deducción formal): Los estudiantes entienden la estructura axiomática de las matemáticas (axiomas, definiciones, teoremas, etc.). También entienden la necesidad de las demostraciones formales como único método válido para asegurarse de la veracidad de una conjetura y pueden realizar demostraciones lógico-deductivas formales. Esta capacidad de razonamiento permite tener una visión globalizadora del área que se está estudiando.

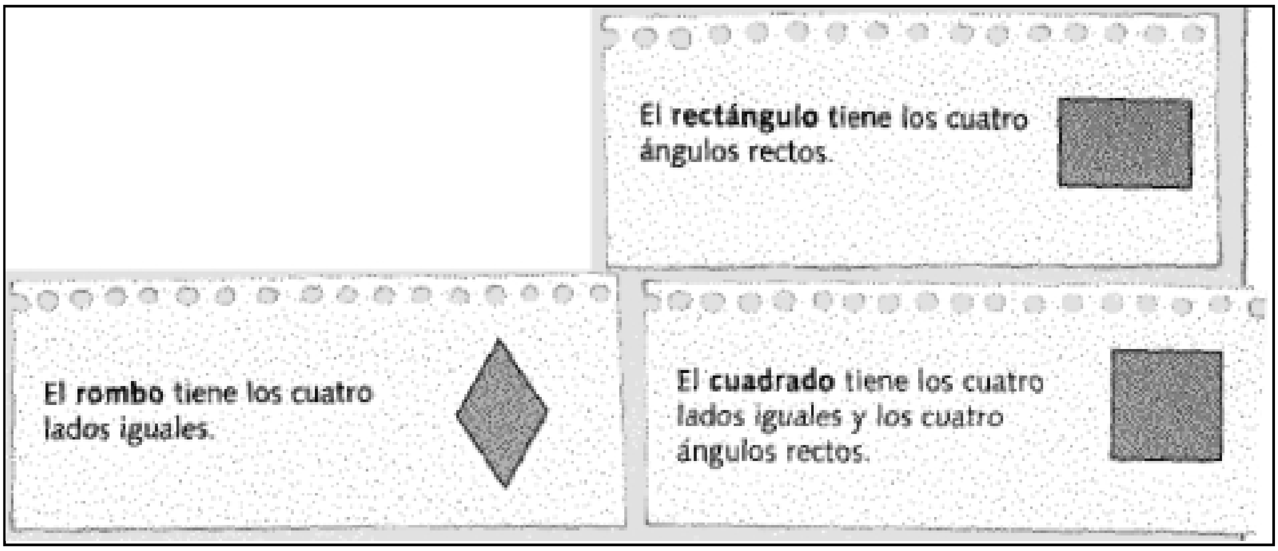
La enseñanza de los cuadriláteros es un ejemplo del uso de los niveles de Van Hiele como marco para organizar la enseñanza, y en el siguiente ejemplo mostramos cómo los niveles resultan útiles también para organizar la enseñanza de la demostración matemática. Teniendo en cuenta los niveles de razonamiento, se pueden secuenciar las propuestas que los alumnos deben trabajar sobre cuadriláteros, permitiendo que progresen a lo largo de los niveles y evitando plantear situaciones propias de un nivel superior o inferior al que se está adquiriendo. Esta forma de trabajo resulta especialmente interesante para planificar la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes de altas capacidades y superdotados debido a que su velocidad de aprendizaje obliga, generalmente, a diseñar programaciones que se salen de los límites ordinarios de un curso escolar.

En los cursos de Primaria y ESO se enseñan y utilizan los conceptos de los tipos de cuadriláteros. La lectura de libros de texto de diferentes editoriales o cursos nos muestra que se utilizan dos definiciones diferentes para algunos de estos conceptos. Este es, por ejemplo, el caso del rectángulo y el rombo.

En un libro de texto de 4º de E. Primaria leemos:

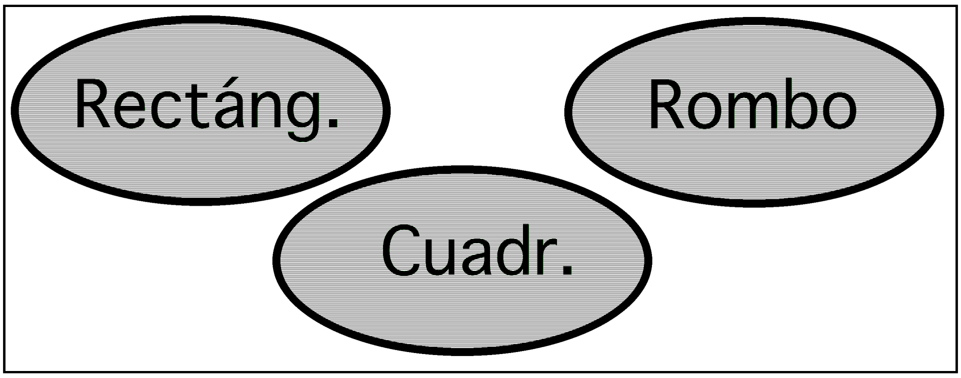


Y en otro libro de texto de 5º de E. Primaria leemos:

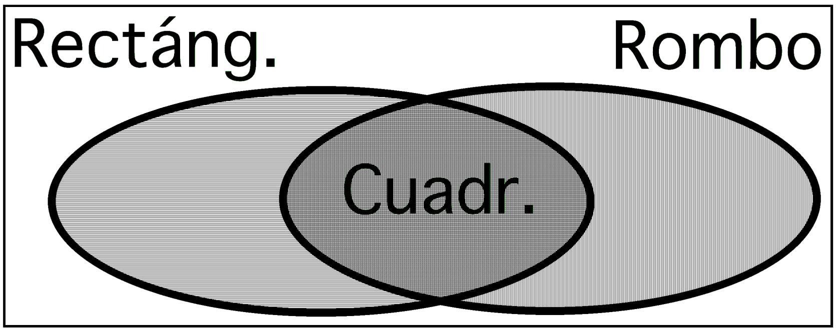


La diferencia entre ambos grupos de definiciones es importante, porque dan lugar a clasificaciones diferentes de las mismas figuras:

Según el libro de 4º de E. Primaria, cada familia de polígonos es independiente de las otras: Los cuadrados no son rombos ni rectángulos, porque no cumplen sus definiciones. Este diagrama conjuntista sintetiza la falta de relación:



Y según el libro de 5º de E. Primaria, hay una relación de pertenencia entre estas familias: Los cuadrados son, al mismo tiempo, rectángulos y rombos, porque cumplen los requisitos señalados en sus definiciones. Este diagrama conjuntista sintetiza la relación de inclusión:



El modelo de Van Hiele nos ayuda a organizar esta situación, pues nos dice que en los niveles de razonamiento 1 y 2 los estudiantes sólo son capaces de entender y utilizar las definiciones que inducen familias disjuntas (las del libro de 4º de E. Primaria), y que los estudiantes de los niveles de razonamiento 3 y 4 son capaces de entender y utilizar *también* las definiciones que inducen familias relacionadas (las del libro de 5º de E. Primaria). La mayoría de estudiantes de primaria y ESO razonan en los niveles 1 y 2, por lo que no debemos extrañarnos si tienen dificultades con las definiciones inclusivas.

No obstante, es importante saber que, desde un punto de vista puramente matemático, a medio y largo plazo las definiciones que resultan más útiles son las que inducen familias relacionadas. Por ello, los alumnos de altas capacidades y superdotados, por su mayor capacidad de razonamiento abstracto, sí deben aprender a usar las definiciones inclusivas, pues ello les ayudará a aumentar su nivel de razonamiento. En los últimos cursos de E. Primaria ya se les pueden plantear actividades para que usen las definiciones inclusivas, no como simple memorización de las mismas, sino para que las utilicen para hacer un análisis matemático de las características utilizadas, las implicaciones a que eso conlleva, la formulación de definiciones equivalentes (por ejemplo, definir cuadrado como "rectángulo con todos los lados iguales" o como "rombo con todos los ángulos iguales"), etc.

Ejemplo 3: Enseñar a demostrar en matemáticas de Primaria, ESO y Bachillerato.

La demostración es uno de los pilares en los que se apoyan las matemáticas actuales. Los investigadores matemáticos están de acuerdo en que una demostración es el único medio válido para aceptar la veracidad de un nuevo teorema.

En el mundo de las matemáticas escolares hay opiniones dispares sobre cómo pueden o deben ser las demostraciones admisibles de los estudiantes. Superadas la época de las "matemáticas modernas" (que en España está asociada a la implantación de la LOGSE), en la que se intentaba que todos los estudiantes de Secundaria aprendieran a hacer demostraciones formales, y las décadas siguientes (desde el mediados de los años 80 hasta el comienzo del siglo XXI), en las que pocas veces se mencionaban las demostraciones y muchas menos se enseñaban, en la actualidad nos encontramos en un momento en el que profesores, didactas y matemáticos preocupados por la problemática de la enseñanza están en su mayoría de acuerdo en que los estudiantes de Secundaria inicien el contacto con las demostraciones deductivas y en que aprender a demostrar es un largo camino, que dura varios años, en el cual las demostraciones formales sólo son el último paso. Para que esta propuesta de objetivos de enseñanza sea realizable, es necesario empezar el trabajo desde el comienzo de la E. Primaria.

Los actuales currículos de E. Primaria, ESO y Bachillerato de la Comunidad Valenciana recogen esta tendencia. Así, entre los objetivos de la asignatura de matemáticas de E. Primaria está:

> 14. Comprender la necesidad de la argumentación mediante razonamientos lógicos en el estudio de las Matemáticas.

Y el primero de los Contenidos Comunes a todos los bloques para el tercer ciclo de E. Primaria es:

> – Capacidad para formular razonamientos y para argumentar sobre la validez de una solución, identificando, en su caso, los errores.

Del mismo modo, en el currículo de ESO se indica, como primer objetivo para la etapa:

> 1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.

Entre los contenidos del bloque de geometría de 1º de ESO está:

> – Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano empleando métodos inductivos y deductivos. ...

Y entre los contenidos del bloque 1 (contenidos comunes) de 4º de ESO, opción A, están:

> – Planificación y utilización de procesos de razonamiento ... la emisión y justificación de hipótesis ...
> – Expresión verbal de argumentaciones, ... con la precisión y rigor adecuados a la situación.
> – Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones ...

Por último, para completar este repaso de nuestros currículos oficiales, vemos que en el de Bachillerato de Ciencias y Tecnología se propone que:

> En las Matemáticas de esta modalidad y sobre todo en las de segundo curso, los alumnos deben alcanzar el grado de madurez necesario, en el manejo del lenguaje formal y de los procesos lógicos deductivos, que les permitan, por ejemplo, seguir, interpretar y desarrollar demostraciones que no sean excesivamente complicadas, plantear conjeturas, analizar procesos lógicos y obtener conclusiones, generalizaciones, etc.

> (Objetivos generales) 4. Comprender la forma de organización de los conocimientos propios de la Matemática: establecimiento de definiciones precisas, demostración lógico-deductiva de propiedades, enunciación de teoremas y justificación de procedimientos, técnicas y fórmulas,

Para llevar a la práctica esta propuesta, es necesario que, en el contexto de la enseñanza no universitaria, la palabra “demostración” tenga un significado amplio que integre diversos tipos de explicaciones, justificaciones, verificaciones o demostraciones informales y formales admitidas por los estudiantes, en coherencia con los niveles 2 a 4 de Van Hiele. De esta manera, “demostrar” se constituye, desde el comienzo de la E. Primaria, en una actitud permanente de explicar o justificar las propias afirmaciones, conclusiones o soluciones, más que en un requisito restringido a los cursos superiores de ESO y al bachillerato de ciencias.

No podemos olvidar que los estudiantes de altas capacidades y superdotados para las matemáticas están especialmente preparados para realizar esta actividad, y creemos que sin un desarrollo adecuado de su capacidad de razonamiento deductivo nunca podrán poner en juego todas sus potencialidades matemáticas.

Un profesor nunca debe empeñarse en que sus alumnos realicen un tipo de demostraciones para el que todavía no están preparados y cuya estructura y finalidad no entienden. Pero, por otra parte, los estudiantes de alta capacidad matemática deben recibir una formación amplia que incluya, inevitablemente, la enseñanza de la demostración. La parte más difícil del trabajo de un profesor en este terreno es la que tiene que ver con hacer progresar la habilidad de sus alumnos para hacer demostraciones.

Los resultados de diversas investigaciones proponen un marco de referencia para trabajar en la enseñanza de la demostración. Este marco está formado por tres facetas de la demostración estrechamente relacionadas que es necesario tener en cuenta al organizar las clases: Las *funciones de las demostraciones*, las *concepciones de los estudiantes* sobre demostración, y los *tipos de demostraciones* producidas por los estudiantes. No vamos a desarrollar aquí estas facetas porque nos llevaría demasiado lejos del objetivo de este texto, pero sí podemos señalar que, en primer lugar, debemos distinguir entre dos grandes clases de demostraciones:

Demostraciones empíricas o *inductivas*. Son las demostraciones que justifican la veracidad de una conjetura mediante su comprobación en uno o varios ejemplos concretos. Corresponden al nivel 2 de razonamiento de Van Hiele y son típicas de la enseñanza Primaria y primeros cursos de ESO.

Demostraciones abstractas o *deductivas*. Son las demostraciones que justifican la veracidad de una conjetura mediante argumentos deductivos basados en las hipótesis y otras propiedades previamente admitidas como ciertas. Corresponden a los niveles 3 y 4 de razonamiento de Van Hiele, y deberían empezar a practicarse antes de terminar la ESO.

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas apuntan a que hay un recorrido que los estudiantes siguen cuando progresan en su capacidad de razonamiento deductivo, que, como decíamos antes, debe empezar en los primeros años de Primaria y desarrollarse a lo largo de toda la enseñanza no universitaria. Los profesores pueden observar y evaluar el progreso a lo largo de este recorrido viendo cómo varían los tipos de demostraciones hechas por los estudiantes. El siguiente esquema resume nuestra propuesta de cómo abordar la enseñanza de la demostración matemática con estudiantes de altas capacidades:

1º a 4º de Primaria	Transición a demostración empírica.
5º de Primaria a 1º de ESO	Demostración empírica cada vez más elaborada.

2º de ESO	Transición a la demostración deductiva informal.
3º de ESO	Demostración deductiva informal.
1º de Bachillerato (C y T)	Transición a la demostración deductiva formal.
2º de Bachillerato (C y T)	Demostración deductiva formal sencilla.